

Αξιοματική θεμελίωση του κανόνα του παράλληλογράμμου

Κώστας Κούδας
Μαθηματικός

Περίληψη

Τα διανύσματα είναι συνυφασμένα με την έννοια του αθροίσματός τους, καθόσον αυτό είναι στοιχείο της δομής και της συμπεριφοράς τους. Η κατανόηση λοιπόν της έννοιας τους διανύσματος περνάει μέσα από την κατανόηση της έννοιας του αθροίσματος διανυσμάτων (βλ. [3]). Συνήθως το άθροισμα διανυσμάτων στην τάξη παρουσιάζεται είτε ως ανθραίρετος κανόνας είτε σύνθεση μετατοπίσεων είτε ως σύνθεση κινήσεων.

Στις παρακάτω γραμμές δεν θα γίνει διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία του αθροίσματος διανυσμάτων. Θα γίνει μια απόπειρα να θεμελιωθεί αυτό σε κάποιες βασικές αρχές, οι οποίες με τη σειρά τους μπορεί ν' αποτελέσουν πηγή έμπνευσης για την διδακτική προσέγγιση.

Περιεχόμενα

1	Διάφορες προσεγγίσεις του αθροίσματος διανυσμάτων	1
2	Προβλήματα ερμηνείας	2
3	Κάποιες βασικές παραδοχές	4
4	Θεμελίωση κανόνα παράλληλογράμμου - επιχείρημα Poisson	5
4.α'	Κάποιες βασικές αρχές.	7
4.β'	Αξιοματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων με ίσα μέτρα	7
4.γ'	Αξιοματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων - γενική περίπτωση.	11
5	Παράρτημα- Συναρτησιακές εξισώσεις	12

1 Διάφορες προσεγγίσεις του αθροίσματος διανυσμάτων

Η ταύτιση ενός διανύσματος με τον προσανατολισμό και το μέγεθος μιας μετατόπισης είναι η ευκολότερη μέθοδος (βλ. [2] και [8]). Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ δηλώνει την μετατόπιση από το A στο B και οποιαδήποτε μετατόπιση παράλληλη και ισομεγέθης μ' αυτήν. Αντίστοιχα, το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ δηλώνει την μετατόπιση από το B στο G (και οποιαδήποτε μετατόπιση παράλληλη και ισομεγέθης μ'

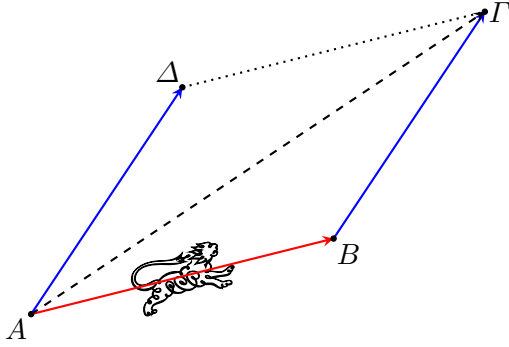
αυτήν). Υπό αυτή την οπτική γωνία το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι οι δύο μετατοπίσεις λαμβανόμενες μαζί. Εύλογο είναι, λοιπόν, να θεωρήσουμε πως (βλ. ΣΧΗΜΑ 1):

- αν το $\overrightarrow{AB}$ δηλώνει τη μετατόπιση π.χ. ενός λιονταριού από το A στο B και
- αν το $\overrightarrow{BG}$ δηλώνει τη μετατόπιση του λιονταριού από το B στο G ,

τότε αν λάβουμε υπ' όψιν και τις δύο μετατοπίσεις, δηλα-

δή την $\vec{AB} + \vec{BG}$, το λιοντάρι θα μετατοπιστεί από το A στο G , δηλαδή θα εκτελέσει τη μετατόπιση $\vec{AG}$.

Θεωρώντας το διάνυσμα $\vec{AD} = \vec{BG}$, είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\vec{AG}$ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου $ABGD$.

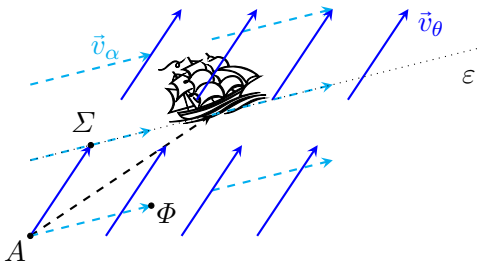


ΣΧΗΜΑ 1. Μετατόπιση ενός λιονταριού από το A στο B και από το B στο G .

Το ελληνικό σχολείο (βλ. [12]) υιοθετεί μιαν άλλη προσέγγιση, αυτή της σύνθεσης ταχυτήτων. Η προσέγγιση αυτή ανάγεται στην προηγούμενη της σύνθεσης μετατοπίσεων, αλλά έχει και ξεχωριστή διδακτική και ερμηνευτική αξία. Για να την εξετάσουμε ας πάρουμε π.χ. ένα ιστιοπλοϊκό (βλ. ΣΧΗΜΑ 2), το οποίο παρασύρεται από τον άνεμο με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_\alpha$ κινούμενο σε ευθεία γραμμή (ε), ενώ επίσης η θάλασσα έχει ρεύματα ταχύτητας $\vec{v}_\theta$, άρα μετακινεί την ευθεία ε με ταχύτητα $\vec{v}_\theta$ ¹. Σύμφωνα με την ανάλυση του [12]:

- αν ο άνεμος σε χρόνο t παρασύρει ένα αντικείμενο (π.χ. ένα φτερό) από την αρχική θέση του ιστιοπλοϊκού (A) στη θέση Φ και
- αν η θάλασσα σε χρόνο t παρασύρει ένα αντικείμενο (π.χ. μια σανίδα) από την αρχική θέση του ιστιοπλοϊκού (A) στη θέση Σ ,

τότε το ιστιοπλοϊκό κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος 0 s έως t s θα κινείται πάνω στην διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα τμήματα AB και AG .



ΣΧΗΜΑ 2. Συνισταμένη ταχύτητα ιστιοπλοϊκού.

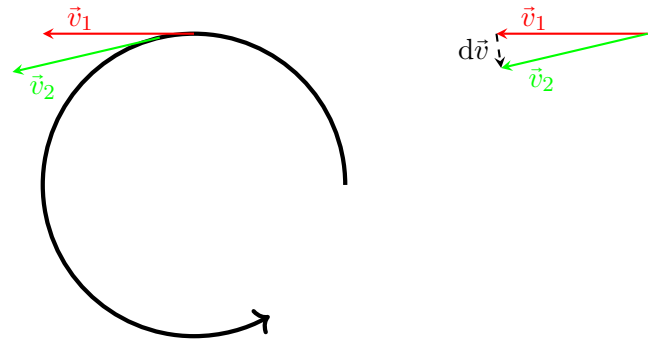
¹Οι ταχύτητες $\vec{v}_\alpha$ και $\vec{v}_\theta$ είναι με σύστημα αναφοράς τον στερεό φλοιό της Γης, ενώ η ευθεία ε λογίζεται με σύστημα αναφοράς

Το [10] παραθέτει μια μεγάλη ποικιλία προσεγγίσεων πάνω στο άθροισμα διανυσμάτων, αξίζει όμως να μνημονευθεί η ανατρεπτική (όσον αφορά το ζήτημα που διαπραγματευόμαστε εδώ) προσέγγιση που έχει το [4]. Αξίζει να τη δούμε παρότι ούτε σκοπεύει να δώσει μια γενική ερμηνεία του διανυσματικού μεγέθους (εστιάζει μόνο στις ταχύτητες) ούτε κι επίσης αναλύει αυστηρά αυτή την προσέγγιση (δίνει μόνο μια αιτιολόγησή της στην περίπτωση που τα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ είναι ομόρροπα), διότι δείχνει την ποικιλία των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να έρθουμε σε επαφή με τη φύση του διανύσματος.

Το εν λόγω σύγγραμμα, λοιπόν, δεν ασχολείται με το άθροισμα, αλλά με την διαφορά διανυσμάτων. Εστιάζοντας στην μεταβολή της ταχύτητας κατά την κυκλική κίνηση (άρα στην κατεύθυνση της δύναμης), ορίζει ως διαφορά των «κοντινών» ταχυτήτων $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$:

$$d\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

το διάνυσμα με αρχή το πέρας του $\vec{v}_1$ και τέλος το πέρας του $\vec{v}_2$ (βλ. ΣΧΗΜΑ 3).



ΣΧΗΜΑ 3. Αλλαγή ταχύτητας.

2 Προβλήματα ερμηνείας

Οι ερμηνείες αυτές, όμως, συναντάνε δυσκολίες όταν προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε το άθροισμα άλλων διανυσματικών μεγεθών, όπως οι ορμές ή οι επιταχύνσεις. Οι δυσκολίες μάλιστα μεγαλώνουν περισσότερο όταν θελήσουμε να προσθέσουμε διανυσματικά μεγέθη που δεν εμπεριέχουν κίνηση, όπως οι δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα ακίνητο σώμα (βλ. [10]).

Θα μπορούσαμε να υπερβούμε τα προβλήματα αυτά επιβάλλοντας αυθαίρετα τον κανόνα του παραλληλογράμμου σε όλα τα διανυσματικά μεγέθη. Αυτή η υπόθεση όμως προϋποθέτει ότι όλα τα διανυσματικά μεγέθη συμπεριφέρονται το ίδιο, πράγμα καθόλου αυτονόητο. Αφού διαφέρουν ως προς τη φύση τους, θα μπορούσαν να διαφέρουν και ως προς τη διαδικασία σύνθεσής τους.

τη θάλασσα.

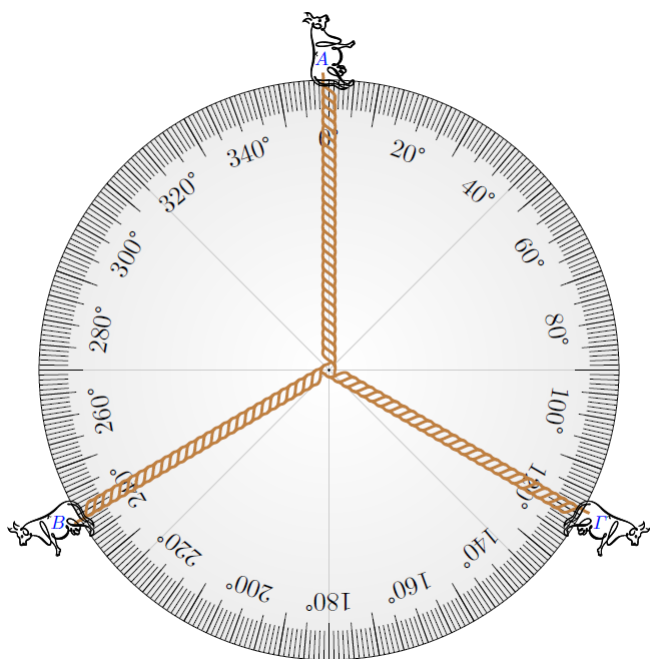
Ίσως μάλιστα και να είναι παράλογο να εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου σε όλα τα διανυσματικά μεγέθη.

► Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το γεγονός:

Δύο δυνάμεις 100N η κάθε μία που σχηματίζουν γωνία 120° ασκούνται σ' έναν μεγάλο βράχο.

Πώς βρίσκουμε παραδοσιακά τη συνισταμένη των δυνάμεων αυτών; Σχηματίζουμε δύο ίσα βέλη με γωνία 120° μεταξύ τους, σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο με αυτά σαν διαδοχικές πλευρές και λαμβάνουμε ως συνισταμένη τη δύναμη που αντιπροσωπεύεται από το μήκος και την κατεύθυνση της διαγωνίου του παραλληλογράμμου.

Θα έλεγε, λοιπόν, κανείς πως φαντάζει παράλογο να θεωρούμε πως η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών εκφράζεται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του τρόπου αναπαράστασης τους. Άλλωστε, δεν είναι παράλογο να μετράμε ζωγραφιές για να βγάλουμε συμπεράσματα για δυνάμεις; Θα μπορούσε εύλογα να ισχυριστεί πως, αν ο αναγνώστης διαβάσει φωναχτά την πλασιογράμματη περίοδο, τότε αναπαριστά το περιγραφόμενο γεγονός με μια ακολουθία ταλαντώσεων του ατμοσφαιρικού αέρα, τα ηχητικά κύματα της φωνής του. Θα είχε κανένα νόημα να εξάγουμε τη συνισταμένη των εν λόγω δυνάμεων βασιζόμενοι σε μετρήσεις των κυμάτων αυτών (ένταση, συχνότητα κτλ); Δεν θα ήταν ένας αδικαιολόγητος παραλογισμός;



ΣΧΗΜΑ 4. Τρεις ίσες δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία 120° .

Η αυθαίρετη επέκταση του κανόνα του παραλληλογράμμου ενέχει επίσης τον κίνδυνο της αλόγιστης επέκτασης αυτού του κανόνα. Όπως περιπαιχτικά γράφεται στο [3], δύο θερμόμετρα στραμμένα προς διαφορετικές κατευθύνσεις έχουν μέτρο, διεύθυνση και φορά. Έχει νόημα να τα προσθέσουμε με τον κανόνα του παραλληλογράμμου; Ο αναγνώστης που θα βρει το παραπάνω επιχείρημα παιδαριώδες, μπορεί να θεωρήσει στη θέση των θερμομέτρων την τάση εφελκυσμού (σ) ή την ελαστική παραμόρφωση (ϵ), που επίσης έχουν μέτρο και κατεύθυνση, αλλά δεν αθροίζονται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου (βλ. [6]).

Στο σημείο αυτό κάποιος θα μπορούσε να φέρει την ακόλουθη ένσταση:

► Πάντως, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει με την τάση εφελκυσμού ή την ελαστική παραμόρφωση, για τη σύνθεση δυνάμεων ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Για να βρούμε τη συνισταμένη δύο ίσων δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία 120° , αρκεί να φανταστούμε τρεις ίσες δυνάμεις που ασκούνται στο ίδιο σώμα. Όπως π.χ. οι δυνάμεις που ασκούν οι αγελάδες A , B και Γ στο ΣΧΗΜΑ 4.

Το σύστημα αυτών των τριών δυνάμεων βρίσκεται σε ισορροπία, διότι η συνισταμένη τους δεν έχει κανένα παραπάνω λόγο να δείχνει π.χ. στις 20° , απ' ό,τι:

- * στις $100^\circ (= 120^\circ - 20^\circ)$ ή
- * στις $140^\circ (= 120^\circ + 20^\circ)$ ή
- * στις $220^\circ (= 240^\circ - 20^\circ)$ ή
- * στις $260^\circ (= 240^\circ + 20^\circ)$ ή
- * στις $340^\circ (= 360^\circ - 20^\circ)$.

Επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ και $\vec{F}_\Gamma$ είναι μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη των $\vec{F}_B$ και $\vec{F}_\Gamma$ είναι η αντίθετη της $\vec{F}_A$, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνισταμένη των $\vec{F}_B$ και $\vec{F}_\Gamma$ έχει την κατεύθυνση της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που αυτές σχηματίζουν και μέτρο όσο το μήκος της διαγωνίου του, αν αυτές έχουν σχεδιαστεί με μήκη ίσα με τα μέτρα τους σε καθαρούς αριθμούς (βλ. [7]).

Όμως αυτή η πολύ απλή και όμορφη απόδειξη έχει κατ' αρχάς το πρόβλημα της πολύ ειδικής αναφοράς στην περίπτωση των 120° . Κατά δεύτερον φανερώνει ένα ακόμα πρόβλημα που έχουν όλες αυτές οι αναλύσεις: κάθε μία είναι αυστηρά περιορισμένη στο φυσικό μέγεθος που μελετά. Θα περιμέναμε, όμως, ένας κανόνας που βλέπουμε να εμφανίζεται σε όλα τα διανυσματικά μεγέθη να έχει μια κοινή αιτιολόγηση.

Για τους παραπάνω λόγους χρειάζεται να θεμελιωθεί ο κανόνας του παραλληλογράμμου σε πιο απλές και απτές βάσεις κοινές σε όλα τα διανυσματικά μεγέθη.

3 Κάποιες βασικές παραδοχές

Πριν αναλύσουμε τι χαρακτηριστικά περιμένουμε να έχει η σύνθεση δύο διανυσμάτων, θα εισάγουμε την πράξη « $\oplus$ » για την αναπαράσταση αυτού που θα επιθυμούσαμε να είναι η σύνθεση, ώστε να μην συγχέεται με τη συνήθη πράξη του αθροίσματος « $+$ » δύο διανυσμάτων. Έτσι, γράφουμε:

$$\vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2$$

για την σύνθεση π.χ. δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όπως αυτή θα οριστεί με τις παραδοχές μας. Σκοπός είναι να δείξουμε ότι αυτή η πράξη ταυτίζεται με την συνηθισμένη πρόσθεση.

Θα εκμαιεύσουμε τα αξιώματα πάνω στα οποία θα θεμελιωθεί η « $\oplus$ » χρησιμοποιώντας παραδειγματικά τις δυνάμεις, μιας και αυτών το άθροισμα ήταν το δυσκολότερο να θεμελιωθεί.

Τι περιμένουμε, λοιπόν, να έχει σαν χαρακτηριστικό η σύνθεση δύο δυνάμεων;

Κατ' αρχάς περιμένουμε η σύνθεση δύο δυνάμεων ($\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$) να είναι μια πράξη που να εξαρτάται αποκλειστικά από την μεταξύ τους σχέση. Περιμένουμε, δηλαδή, σε οποιοδήποτε σημείο του σύμπαντος κι αν αυτές οι δυνάμεις ασκηθούν με την ίδια ένταση και την ίδια γωνία, να έχουν την ίδια συνισταμένη. Ένας φυσικός θα έλεγε πως η $\vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2$ πρέπει να είναι ανεξάρτητη του ακίνητου, ως προς τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, παρατηρητή. Ένας μαθηματικός θα έλεγε πως η $\vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2$ πρέπει να είναι ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό των διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Αφού οι παράλληλες μετατοπίσεις αφήνουν τις δυνάμεις αναλλοίωτες, θα παραμένει αναλλοίωτη και η συνισταμένη τους. Έτσι, το μόνο που απομένει για να εκπληρώνεται η απαίτηση της προηγούμενης παραγράφου, είναι η συνισταμένη των δυνάμεων να ακολουθεί τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ στους μετασχηματισμούς που αλλάζουν απλώς τη θέση του παρατηρητή, δηλαδή που αφήνουν αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες (ισομετρίες). Αυτοί είναι οι στροφές. Έτσι έχουμε το πρώτο μας αξίωμα:

Αξίωμα 1: Αν $\vec{u} = \vec{a} \oplus \vec{\beta}$ και μια περιστροφή στέλνει τα $\vec{u}, \vec{a}, \vec{\beta}$ στα $\vec{u}_1, \vec{a}_1, \vec{\beta}_1$, τότε $\vec{u}_1 = \vec{a}_1 \oplus \vec{\beta}_1$.

Κατά δεύτερον περιμένουμε ότι:

- είτε αν μια δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται σ' ένα σώμα και αχολούθως ασκηθεί πάνω του μια επιπλέον δύναμη $\vec{F}_2$,

- είτε αν μια δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται σ' ένα σώμα και αχολούθως ασκηθεί πάνω του μια επιπλέον δύναμη $\vec{F}_1$,

τελικά το σώμα να δέχεται την ίδια συνισταμένη δύναμη. Με απλά λόγια, θέλουμε να μην παίζει ρόλο η σειρά με την οποία λαμβάνουμε υπ' όψιν τις δύο αυτές δυνάμεις.

Εστιάζοντας στην ίδια την πράξη θα λέγαμε πως η « $\oplus$ » θα πρέπει να αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο τις δυνάμεις που συνθέτει. Όπως πχ η πράξη « $+$ » αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο τους αριθμούς 3 και 4 όταν έχουμε $3+4$, ενώ η πράξη « $:$ » τους αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο όταν έχουμε $3:4$, διότι το 3 είναι το μοιραζόμενο και το 4 το μοιράζον. Ή όπως πχ η πράξη « $+$ » αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο τους πίνακες A και B όταν έχουμε $A+B$, ενώ η πράξη « $\cdot$ » τους αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο όταν έχουμε $A \cdot B$, διότι από τη μία εστιάζει στις γραμμές του A , αλλά από την άλλη εστιάζει στις στήλες του B . Για να έχουμε αυτή τη δυνατότητα χρειαζόμαστε το δεύτερό μας αξίωμα:

Αξίωμα 2: Η πράξη « $\oplus$ » έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Κατά τρίτον θα θέλαμε να μπορεί να γενικευτεί η έννοια της συνισταμένης και σε περισσότερες των δύο δυνάμεων. Μάλιστα θα θέλαμε να μπορεί να τις αντιμετωπίζει όλες μαζί σαν μια ενιαία οντότητα. Δηλαδή θα θέλαμε να στέκει το άθροισμα:

$$\vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2 \oplus \vec{F}_3.$$

Για να έχουμε αυτή τη δυνατότητα χρειαζόμαστε το τρίτο μας αξίωμα:

Αξίωμα 3: Η πράξη « $\oplus$ » έχει την προσεριστική ιδιότητα.

Κατά τέταρτον, ας υποθέσουμε ότι δύο άτομα ασκούν ομόρροπες δυνάμεις 3N και 4N σ' ένα αυτοκίνητο. Αν τα άτομα αυτά αντικατασταθούν από ένα τρίτο που ασκεί τις δυνάμεις τους μαζί, δηλαδή 7N, το αυτοκίνητο, προφανώς, δεν μπορεί ν' αντιληφθεί τη διαφορά. Για το αυτοκίνητο ισχύει ότι η σύνθεση των δύο αρχικών είναι ίση με το άθροισμα των μέτρων τους. Έχουμε, λοιπόν, το τέταρτό μας αξίωμα:

Αξίωμα 4: Αν $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$, τότε το $\vec{a} \oplus \vec{\beta}$ είναι ομόρροπο μ' αυτά και έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους.

Τέλος, θα θέλαμε να μην έχει χαοτική συμπεριφορά η σύνθεση δύο δυνάμεων. Θα θέλαμε μικρές διαφορές στη μεταξύ τους γωνία να προκαλούν επίσης μικρές μεταβολές στην συνισταμένη δύναμη. Αυτό εξασφαλίζεται με το πέμπτο μας αξίωμα:

Αξίωμα 5: Αν $\vec{a}, \vec{b}$ δύο διανύσματα με ίσα μέτρα, τότε το $\vec{a} \oplus \vec{b}$ εξαρτάται μ' έναν συνεχή τρόπο από τη γωνία τους.

Τα παραπάνω αξιώματα είναι αρκετά για τη δουλειά που θέλουμε να κάνουμε. Η διατύπωση αυτών αντλήθηκε από το [1] και δεν είναι παρά προσέγγιση του Poisson (βλ. [7]) διατυπωμένη σε μια πιο στέρεη βάση. Η αξία αυτής της προσέγγισης φαίνεται από το ότι δεν απαιτεί την κίνηση (βλ. [10]) κι «εφαρμόζεται στην σύνθεση οποιωνδήποτε ποσοτήτων τέτοιων, ώστε η αντιστροφή του προσήμου τους να ισοδυναμεί με περιστροφή τους 180° » (βλ. [6]). Ενδιαφέρον είναι, όπως θα παρατηρήσει κι ο αναγνώστης, ότι αποδεικνύεται παράλληλα τόσο ότι το μέτρο όσο και ότι η κατεύθυνση της σύνθεσης δύο δυνάμεων (ή διανυσμάτων γενικότερα) υπάγονται στον κανόνα του παραλληλογράμμου, κάτι που δείχνει ότι δεν είναι απλά μια μαθηματική σύμπτωση το ότι καθορίζονται και τα δύο από τον κανόνα του παραλληλογράμμου (βλ. [11]).

4 Θεμελίωση κανόνα παραλληλογράμμου - επιχείρημα Poisson

Φυσικά, όταν λέμε ότι συνθέτουμε π.χ. δύο ορμές με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, δεν εννοούμε πως αυτές σχηματίζουν στην πραγματικότητα ένα παραλληλόγραμμο, αλλά ότι αν τις αναπαραστήσουμε με διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ (ίδιας κατεύθυνσης και ίσου μέτρου σε καθαρούς αριθμούς), τότε το διάνυσμα που αναπαριστά την συνισταμένη ορμή είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν οι αναπαραστάσεις των αρχικών ορμών.

Ένα λεπτό, αλλά όχι αυτονόητο ζήτημα που ανακύπτει από αυτό είναι αν όντως στέκει να αναπαριστούμε τις ορμές ή άλλα διανυσματικά μεγέθη με μετατοπίσεις, όταν εξετάζουμε την πράξη « $\oplus$ ». Είναι π.χ. η συμπεριφορά της ίδιας στα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και στις δυνάμεις στον πραγματικό χώρο; Δεν είναι καθόλου αυτονόητο ότι η $\oplus$ -σύνθεση δύο ταχυτήτων συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει η $\oplus$ -σύνθεση δύο δυνάμεων ή δύο μετατοπίσεων.

Προς τούτο χρειαζόμαστε τα κάτωθι θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Έστω ένα διανυσματικό μέγεθος $\mathfrak{V}$ και τέσσερα διανύσματά του $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ τέτοια, ώστε $|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1|$, $|\vec{a}_2| = |\vec{b}_2|$ και $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \psi = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, με $\psi \in [0, \pi]$. Τοιαύτη περιπτώσει ισχύει ότι:

$$|\vec{a}_1 \oplus \vec{a}_2| = |\vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2|$$

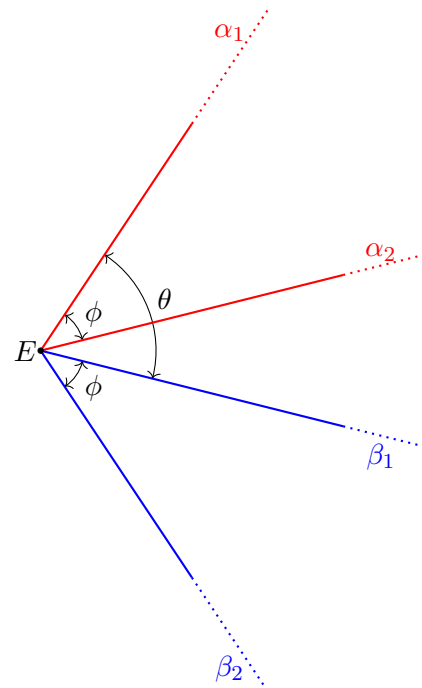
και

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1 \oplus \vec{a}_2) = (\vec{b}_1, \vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2).$$

Απόδειξη. Ας είναι $E\alpha_1, E\alpha_2, E\beta_1$ και $E\beta_2$ οι ημιευθείες που δείχνουν τις κατευθύνσεις των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ αντίστοιχα. Πήραμε κοινή αρχή το σημείο E , καθόσον στα διανύσματα δεν παίζει ρόλο το σημείο εφαρμογής. Ορίζουμε επίσης Π_α και Π_β τα επίπεδα που ανήκουν οι γωνίες $\alpha_1 E \alpha_2$ και $\beta_1 E \beta_2$ αντίστοιχα.

Η απόδειξη θα τελεστεί μέσω κάποιων μετασχηματισμών:

- Σε πρώτη φάση, αν τα Π_α και Π_β δεν είναι παράλληλα, περιστρέφουμε το Π_β κατά γωνία ψ περί της κοινής του ευθείας με το Π_α , με στόχο αυτά τα δύο να συμπίσουν.
- Ακολούθως εξετάζουμε αν ο προσανατολισμός της γωνίας $\alpha_1 E \alpha_2$ είναι ίδιος με τον προσανατολισμό της $\beta_1 E \beta_2$. Στο ΣΧΗΜΑ 5, επί παραδείγματι, οι εν λόγω γωνίες έχουν αμφοτέρως τη φορά του ρολογιού. Αν δεν έχουν ίδιο προσανατολισμό, ξαναπεριστρέφουμε το Π_β κατά γωνία 180° περί της ίδιας ευθείας κι έτσι θα αποκτήσουν ίδιο προσανατολισμό.
- Τέλος, περιστρέφουμε τη γωνία $\beta_1 E \beta_2$ κατά γωνία $\theta = \alpha_1 E \beta_2$.



ΣΧΗΜΑ 5. Το αξιωματικοποιημένο άθροισμα είναι ανεξάρτητο της θέσης των διανυσμάτων

Το αποτέλεσμα από όλες αυτές τις κινήσεις είναι να συμπίσουν οι ημιευθείες $E\alpha_1$ και $E\alpha_2$ με τις $E\beta_1$ και $E\beta_2$. Καθόσον οι στροφές αυτές αφήνουν αμετάβλητα τα μέτρα των διανυσμάτων, οι προαναφερθείσες κινήσεις οδηγούν τα διανύσματα $\vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ να συμπίσουν με τα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$. Με άλλα λόγια οι περιστροφές κατά τις γωνίες ψ και ϕ (και 180° , ενδεχομένως) στέλνουν τα διανύσματα

$\vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2$, $\vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ στα διανύσματα $\vec{b}_0$, $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$. Έτσι, λόγω της ιδιότητας (α') προκύπτει ότι:

$$\vec{b}_0 = \vec{a}_1 \oplus \vec{a}_2.$$

Καθόσον $|\vec{b}_0| = |\vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2|$ (διότι οι στροφές αφήνουν αναλλοίωτα τα μέτρα των φυσικών μεγεθών), καταλήγουμε στο ότι:

$$|\vec{a}_1 \oplus \vec{a}_2| = |\vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2|.$$

Καθόσον επίσης $(\vec{a}_1, \vec{b}_0) = (\vec{b}_1, \vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2)$ (διότι οι στροφές αφήνουν αναλλοίωτες τις γωνίες), καταλήγουμε στο ότι:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1 \oplus \vec{a}_2) = (\vec{b}_1, \vec{b}_1 \oplus \vec{b}_2).$$

□

Το συμπέρασμα που προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα είναι ότι, για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{m}, \vec{n}$ με $|\vec{m}| = |\vec{n}| = t$ και $\psi = (\vec{m}, \vec{n})$ το μέτρο του $\vec{s} = \vec{m} \oplus \vec{n}$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των t και ψ . Οπότε μπορούμε να ορίσουμε ως

$$\ell(t, \psi)$$

την συνάρτηση που δίνει το μήκος του $\vec{s} = \vec{m} \oplus \vec{n}$.

Θεώρημα 2. Έστω ένα διανυσματικό μέγεθος $\mathfrak{V}$ εφοδιασμένο με την πράξη $\oplus$. Αυτό θα είναι ισόμορφο με τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^2$ (ή του $\mathbb{R}^3$) εφοδιασμένο πράξη $\oplus$.

Απόδειξη. Έστω $f : \mathfrak{V} \rightarrow \mathcal{V}$ η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε διάνυσμα του $\mathfrak{V}$ στο ομόρροπο με αυτό διάνυσμα του $\mathcal{V}$, με το οποίο έχουν ίσα μέτρα. Για παράδειγμα, αν το $\mathfrak{V}$ είναι το διανυσματικό μέγεθος «δύναμη», τότε μία δύναμη 7N αντιστοιχίζεται σε ένα ομόρροπο με αυτήν διάνυσμα του χώρου μήκους 7cm.

Έστωσαν, λοιπόν, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathfrak{V}$ και $\vec{\alpha} = f(\vec{a})$, $\vec{\beta} = f(\vec{b})$ δύο διανύσματα του $\mathcal{V}$.

Ας είναι επίσης cm η μονάδα μέτρησης μήκους και unit η μονάδα μέτρησης του $\mathfrak{V}$. Με αυτή την ορολογία, αν έχουμε:

$$|\vec{a}| = r_1 \text{ unit και } |\vec{b}| = r_2 \text{ unit,}$$

τότε επίσης:

$$|\vec{\alpha}| = r_1 \text{ cm και } |\vec{\beta}| = r_2 \text{ cm}$$

Από το θεώρημα 1 έχουμε ότι το μέτρο του $\vec{a} \oplus \vec{b}$ και η γωνία του με το $\vec{a}$ εξαρτώνται μόνο από τις τιμές:

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ και } (\vec{a}, \vec{b}),$$

δηλαδή από τις τιμές:

$$r_1, r_2 \text{ και } (\vec{a}, \vec{b}).$$

Το ίδιο, φυσικά, μπορούμε να ισχυριστούμε και για το μέτρο του $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ και τη γωνία του με το $\vec{\alpha}$, ότι δηλαδή εξαρτώνται μόνο από τις τιμές:

$$|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}| \text{ και } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}),$$

επομένως από τις τιμές:

$$r_1, r_2 \text{ και } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}),$$

Αφού όμως $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, τα μέτρα των $\vec{a} \oplus \vec{b}$ και $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ εξαρτώνται από τις ίδιες ποσότητες, άρα σε καθαρούς αριθμούς θα είναι ίσα. Με άλλα λόγια αν

$$\text{αν } |\vec{a} \oplus \vec{b}| = r \text{ unit, τότε και: } |\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}| = r \text{ cm.}$$

Οι γωνίες $(\vec{a}, \vec{a} \oplus \vec{b})$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \oplus \vec{\beta})$ ομοίως εξαρτώνται τελικά από τις ίδιες ποσότητες, άρα κι αυτές θα ισούνται.

Επομένως καταλήγουμε στο ότι:

$$f(\vec{a} \oplus \vec{b}) = f(\vec{a}) \oplus f(\vec{b}).$$

Είναι τετριμμένο ότι η f είναι αμφίρριψη, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Όπως προαναφέρθηκε, το θεώρημα 2 πιστοποιεί ότι μπορούμε να εξετάσουμε το $\oplus$ -άθροισμα κάποιων διανυσματικών μεγεθών απεικονίζοντας τα διανύσματά του σε διανύσματα μήκους ανάλογου του μέτρου τους. Συνοψίζοντας επίσης την συζήτηση της προηγούμενης ενότητας, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ στον $\mathbb{R}^2$ ή τον $\mathbb{R}^3$ και πράξη $\oplus : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}$ τέτοια, ώστε:

(α') αν $\vec{u} = \vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ και μια περιστροφή στέλνει τα $\vec{u}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ στα $\vec{u}_1, \vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1$, τότε $\vec{u}_1 = \vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\beta}_1$,

(β') είναι αντιμεταθετική,

(γ') είναι προσεταιριστική,

(δ') αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, τότε το $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ είναι ομόρροπο μ' αυτά και έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους,

(ε') αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με ίσα μέτρα, τότε το $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ εξαρτάται μ' έναν συνεχή τρόπο από τη γωνία τους.

Η εν λόγω πράξη ονομάζεται **αξιοματικοποιημένο άθροισμα** επί του $\mathcal{V}$.

Θα λοιπόν αποδείξουμε ότι το αξιωματικοποιημένο άθροισμα συμπίπτει με το σύνηθες άθροισμα διανυσμάτων, δηλαδή το αποτέλεσμα του προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

4.α' Κάποιες βασικές αρχές.

Θεώρημα 3. Το ζεύγος $(\mathcal{V}, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. Λόγω της ιδιότητας (δ'), αφού $\vec{0} \uparrow \vec{a}$ για κάθε $\vec{a} \in \mathcal{V}$, έχουμε:

$$|\vec{0} \oplus \vec{a}| = |\vec{a} \oplus \vec{0}| = |\vec{a}| + |\vec{0}| = |\vec{a}|$$

και

$$\vec{0} \oplus \vec{a} \uparrow \vec{a} \uparrow \vec{a} \oplus \vec{0}.$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{0} \oplus \vec{a}$, $\vec{a}$ και $\vec{a} \oplus \vec{0}$ είναι ίσου μέτρου και ομόρροπα, θα ισούνται, δηλαδή:

$$\vec{0} \oplus \vec{a} = \vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}.$$

Επομένως το $\vec{0}$ είναι ουδέτερο στοιχείο της $\oplus$.

Έστω τώρα διάνυσμα $\vec{AB}$. Ορίζουμε επίσης $\vec{A\Gamma} = -\vec{AB}$ κι ένα επίπεδο Π στο οποίο ν' ανήκουν. Έστω ακόμα ευθεία $\varepsilon \perp \Pi$, η οποία διέρχεται από το A . Περιστρέφοντας 180° περί την ε τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ περιστρέφεται μαζί τους και το $\vec{A\Delta} = \vec{AB} \oplus \vec{A\Gamma}$. Όπως και πριν, τα μεν $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ απεικονίζονται στα $\vec{AB'}$ και $\vec{A\Gamma'}$ αντίστοιχα, το δε $\vec{A\Delta}$ στο $\vec{A\Delta'}$ (βλ. ΣΧΗΜΑ 6 - η ευθεία ε δεν διακρίνεται στο σχήμα, καθόσον είναι κάθετη στο επίπεδο του χαρτιού). Λόγω της ιδιότητας (α') ισχύει:

$$\vec{A\Delta'} = \vec{AB'} \oplus \vec{A\Gamma'}.$$

Είναι όμως και πάλι προφανές ότι $\vec{AB'} = \vec{A\Gamma'}$ και $\vec{A\Gamma'} = \vec{AB}$, οπότε $\vec{A\Delta'} = \vec{A\Gamma'} \oplus \vec{AB}$. Λόγω της ιδιότητας (β') έχουμε:

$$\vec{A\Delta'} = \vec{AB} \oplus \vec{A\Gamma},$$

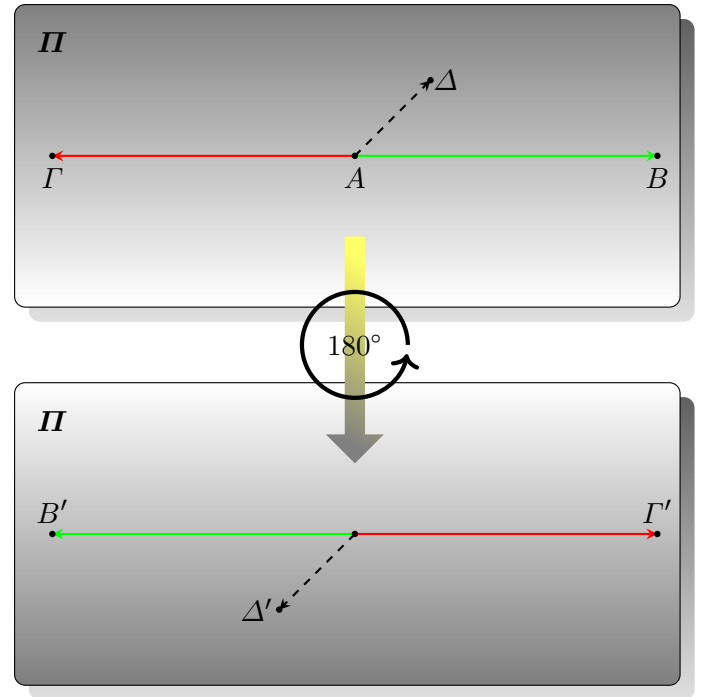
όπερ σημαίνει ότι $\vec{A\Delta'} = \vec{A\Delta}$.

Αφού όμως $\vec{A\Delta'} \uparrow \vec{A\Delta}$, αναγκαστικά $\vec{A\Delta} = \vec{0}$.

Κατά συνέπεια έχουμε $\vec{AB} \oplus \vec{A\Gamma} = \vec{0}$, επομένως κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ έχει $\oplus$ -αντίστροφο, συγκεκριμένα το $-\vec{x}$.

Δεδομένου ότι η πράξη $(\oplus)$ έχει την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα (βλ. ιδιότητες (β') και (γ')) το ζεύγος $(\mathcal{V}, \oplus)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα. $\square$

² Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Poisson στο πρωτότυπο δεν ασχολείται σοβαρά με το να δείξει ότι η συνισταμένη δύο ίσων δυνάμεων διχοτομεί τη μεταξύ τους γωνία, διότι θεωρεί πως «δεν υπάρχει



ΣΧΗΜΑ 6. Στροφή αντίθετων διανυσμάτων κατά 180° .

4.β' Αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων με ίσα μέτρα

Θεώρημα 4. Έστωσαν δύο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ με ίσα μέτρα. Το $\vec{A\Delta} = \vec{AB} \oplus \vec{A\Gamma}$ κείται επί της διχοτόμου της μη κυρτής γωνίας των δύο διανυσμάτων².

Απόδειξη. Ας είναι η ευθεία $\delta'\delta$ η διχοτόμος της κυρτής και της μη κυρτής γωνίας $\vec{BA\Gamma}$ (βλ. πρώτο ορθογώνιο στο ΣΧΗΜΑ 7). Περιστρέφοντας 180° τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ περί της $\delta'\delta$, περιστρέφεται μαζί τους και το $\vec{A\Delta}$. Τα μεν $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ απεικονίζονται στα $\vec{AB'}$ και $\vec{A\Gamma'}$ αντίστοιχα, το δε $\vec{A\Delta}$ στο $\vec{A\Delta'}$ (βλ. δεύτερο ορθογώνιο στο ΣΧΗΜΑ 7). Έχουμε λοιπόν λόγω της ιδιότητας (α'):

$$\vec{A\Delta'} = \vec{AB'} \oplus \vec{A\Gamma'}.$$

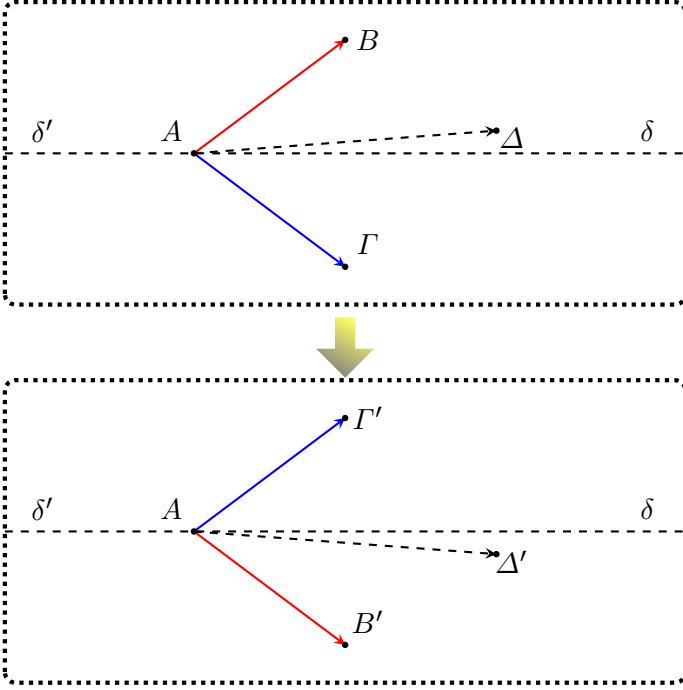
Προφανώς όμως $\vec{AB'} = \vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma'} = \vec{AB}$, οπότε $\vec{A\Delta'} = \vec{A\Gamma} \oplus \vec{AB}$. Λόγω της ιδιότητας (β') έχουμε:

$$\vec{A\Delta'} = \vec{AB} \oplus \vec{A\Gamma},$$

όπερ σημαίνει ότι $\vec{A\Delta'} = \vec{A\Delta}$.

Για να παραμένει το $\vec{A\Delta}$ αναλλοίωτο από την περιστροφή περί της διχοτόμου $\delta\delta'$ σημαίνει ότι κείται επί αυτής, καθόσον τα μόνα σημεία που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν κατοπτρισμό (την στροφή 180° περί της $\delta'\delta$) είναι τα σημεία της ευθείας περί της οποίας τελέσθη ο κατοπτρισμός.

κανένας λόγος [η συνισταμένη] να είναι εγγύτερα στη μία από τις δύο δυνάμεις» (βλ. [7]).



ΣΧΗΜΑ 7. Διεύθυνση αξιωματικοποιημένου αθροίσματος στα διανύσματα ίσου μέτρου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\overrightarrow{A\Delta}$ κείται επί της διχοτόμου της μη κυρτής γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ και ας είναι $\phi \in [0, \pi)$ η μη κυρτή γωνία των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ (βλ. πρώτο ορθογώνιο στο ΣΧΗΜΑ 8).

Αλλάζοντας τη θέση του Γ , ώστε να γίνει $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{A\Gamma}$ (βλ. δεύτερο ορθογώνιο³ στο ΣΧΗΜΑ 8) το αξιωματικοποιημένο άθροισμά τους θα ήταν ομόρροπο με αυτά, όπερ σημαίνει ότι θα βρισκόταν επί της διχοτόμου της κυρτής γωνίας των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

Έτσι, λόγω της ιδιότητας (ε'), θα υπάρχει τιμή της γωνίας $\phi \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\overrightarrow{AB}$ έχει δύο αντιστρόφους στην ομάδα $(\mathcal{V}, \oplus)$, τους $-\overrightarrow{AB}$ και το προαναφερθέν $\overrightarrow{A\Gamma}$, όπερ άτοπον. Επομένως το $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{A\Gamma}$ κείται επί της διχοτόμου της κυρτής γωνίας των δύο διανυσμάτων. $\square$

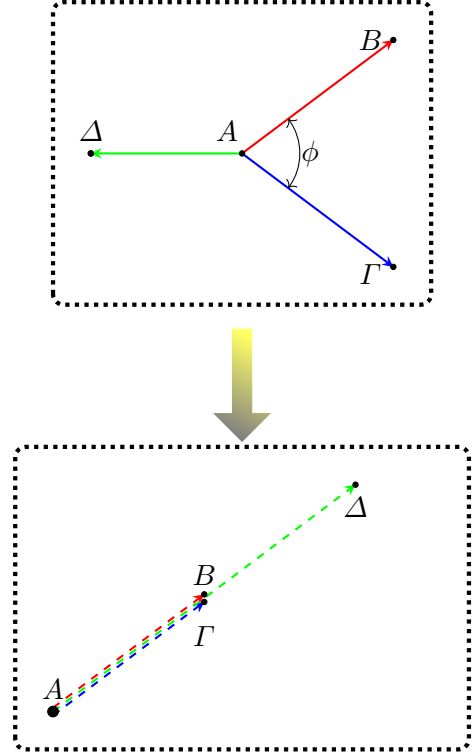
Σύμφωνα με το θεώρημα 1, για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{m}, \vec{n}$ με $|\vec{m}| = |\vec{n}| = t$ και $\psi = (\vec{m}, \vec{n})$ το μέτρο του $\vec{s} = \vec{m} \oplus \vec{n}$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των t και ψ . Οπότε μπορούμε να ορίσουμε ως

$$\ell(t, \psi)$$

την συνάρτηση που δίνει το μήκος του $\vec{s} = \vec{m} \oplus \vec{n}$.

³Εκεί τα τρία διανύσματα είναι συγγραμμικά (και μάλιστα $B \equiv \Gamma$), αλλά για λόγους ευκρίνειας τοποθετήθηκαν ελαφρώς ξεχωριστά.

⁴Το συμπέρασμα αυτό πρακτικά δείχνει ότι, αν αλλάξουμε τι μονάδες μέτρησης των συνιστωσών, αλλάζει με τον ίδιο τρόπο και



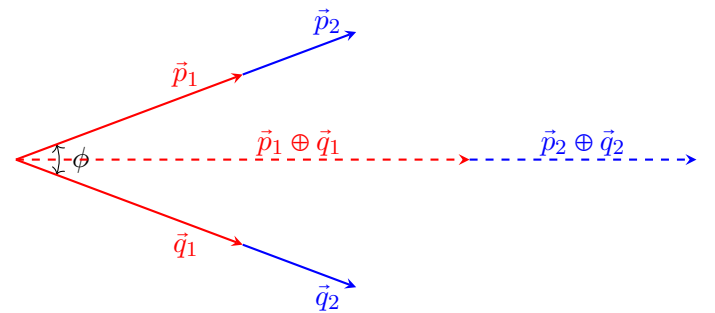
ΣΧΗΜΑ 8. Φορά αξιωματικοποιημένου αθροίσματος στα διανύσματα ίσου μέτρου.

Θεώρημα 5. Αν $\ell(t, \phi)$ είναι η συνάρτηση που δίνει το μέτρο δύο διανυσμάτων μέτρου t , τα οποία σχηματίζουν γωνία $\phi \in [0, \pi]$, τότε θα ισχύει⁴:

$$\ell(t, \phi) = c_\phi \cdot t,$$

όπου εν γένει ισχύει $c_\phi \geq 0$ και ειδικότερα $c_\phi > 0$ αν $\phi \neq \pi$.

Απόδειξη. Έστωσαν τώρα τα διανύσματα $\vec{p}_1 \uparrow \vec{p}_2$ και $\vec{q}_1 \uparrow \vec{q}_2$, με $t(\vec{p}_1, \vec{q}_1) = \phi$ (βλ. 9). Ας είναι επίσης $|\vec{p}_1| = |\vec{q}_1| = x$ και $|\vec{p}_2| = |\vec{q}_2| = y$.



ΣΧΗΜΑ 9. Το μέτρο του αξιωματικοποιημένου αθροίσματος σε εξάρτηση από τα μήκη στα διανύσματα ίσου μέτρου.

το αξιωματικοποιημένο άθροισμά τους. Στο πρωτότυπο του Poisson αυτό αναφέρεται ως *Αρχή της Ομοιογένειας* και τίθεται σ' ένα γενικότερο πλαίσιο πριν την απόδειξη του κανόνα του παραλληλογράμμου.

Επιπροσθέτως, από την ιδιότητα (δ') έχουμε ότι:

$$|\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2| = x + y \text{ και } |\vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2| = x + y. \quad (1)$$

Αφού $(\vec{p}_1, \vec{q}_1) = \phi = (\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ και $|\vec{p}_1| = |\vec{q}_2| = x, |\vec{p}_2| = |\vec{q}_1| = y$, ισχύει:

$$|\vec{p}_1 \oplus \vec{q}_1| = \ell(x, \phi), \text{ και } |\vec{p}_2 \oplus \vec{q}_2| = \ell(y, \phi).$$

Επίσης, τα διανύσματα $\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2$ και $\vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2$ είναι ομόρροπα με τα $\vec{p}_1$ και $\vec{q}_1$, άρα $(\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2, \vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2) = \phi$. Επομένως από την εξίσωση (1) έχουμε ότι:

$$|(\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2) \oplus (\vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2)| = \ell(x + y, \phi).$$

Από τις ιδιότητες (β') και (γ') ισχύει ότι $(\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2) \oplus (\vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2) = (\vec{p}_1 \oplus \vec{q}_1) \oplus (\vec{p}_2 \oplus \vec{q}_2)$ και αφού $\vec{p}_1 \oplus \vec{q}_1 \uparrow \vec{p}_2 \oplus \vec{q}_2$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} |(\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2) \oplus (\vec{q}_1 \oplus \vec{q}_2)| &= \\ &= |(\vec{p}_1 \oplus \vec{q}_1) \oplus (\vec{p}_2 \oplus \vec{q}_2)| = \ell(x, \phi) + \ell(y, \phi). \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

$$\ell(x + y, \phi) = \ell(x, \phi) + \ell(y, \phi)$$

για κάθε $x, y \geq 0$, δηλαδή ότι για τη συνάρτηση $f_\phi(t) = \ell(t, \phi)$ ισχύει ότι:

$$f_\phi(x + y) = f_\phi(x) + f_\phi(y), \text{ για κάθε } x, y \geq 0.$$

Καθόσον επίσης ισχύει $f_\phi(t) = \ell(t, \phi) \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι αυτή ικανοποιεί την προσθετική συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy, όπως αυτή ορίστηκε στο θεώρημα 10, επομένως θα υπάρχει σταθερά $c_\phi \geq 0$ τέτοια, ώστε:

$$f_\phi(t) = c_\phi \cdot t \Leftrightarrow \ell(t, \phi) = c_\phi \cdot t$$

για κάθε $x \geq 0$.

Επίσης ισχύει ότι:

$$\ell(t, \phi) = 0 \Leftrightarrow |\vec{v} \oplus \vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \oplus \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}.$$

Κατά συνέπεια, η περίπτωση $\ell(t, \phi) = 0$ ισχύει ακριβώς όταν $\phi = \pi$. Έτσι η f_ϕ είναι η μηδενική αν και μόνον αν $\phi = \pi$. Συνεπώς, αν $\phi \neq \pi$, τότε $c_\phi > 0$.

□

Είδαμε ότι η περίπτωση $\ell(t, \theta) = 0$ ισχύει ακριβώς όταν $\theta = \pi$. Πώς προκύπτουν όμως οι άλλες τιμές της;

Θεώρημα 6. Ισχύει ότι:

$$\ell(t, \theta) = 2t \cos \frac{\theta}{2},$$

για κάθε $t \geq 0$ και $\theta \in [0, \pi]$.

⁵Ο περιορισμός αυτός είναι για να βγαίνουν τα αθροίσματα ε-

Απόδειξη. Κατ' αρχάς να σημειώσουμε ότι θέτοντας $t = 1$ στην:

$$\ell(t, \phi) = c_\phi \cdot t$$

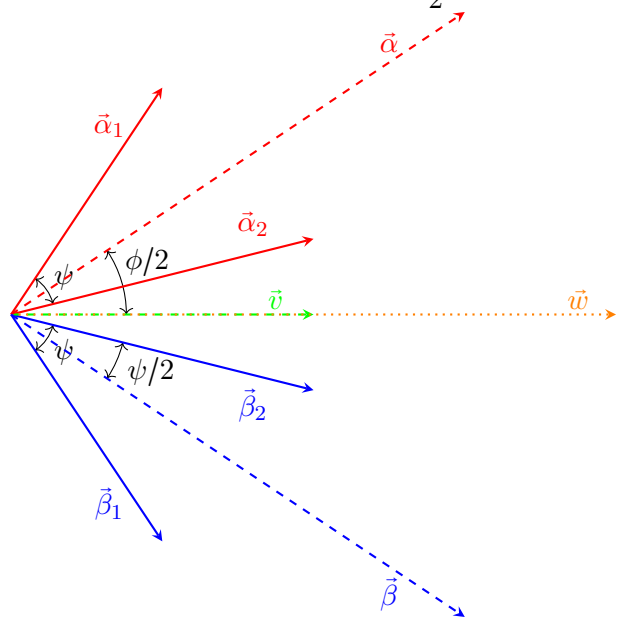
και κρατώντας τη γωνία ίση με ϕ έχουμε ότι:

$$c_\phi = \ell(1, \phi),$$

επομένως:

$$\ell(t, \phi) = \ell(1, \phi) \cdot t.$$

Ακολουθώντας παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ όπως φαίνεται στο 10. Αυτά έχουν όλα μέτρο $t > 0$, και είναι $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = \psi = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2)$, $(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1) = \phi + \psi$ και $(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) = \phi - \psi$, όπου $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.



ΣΧΗΜΑ 10. Τέσσερα διανύσματα ίσου μέτρου.

Έστω επίσης $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2$, $\vec{v} = \vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\beta}_1$ και $\vec{w} = \vec{\alpha}_2 \oplus \vec{\beta}_2$.

Στο θεώρημα 4 δείξαμε ότι το $\vec{\alpha}$ θα κείται επί της διχοτόμου της γωνίας των $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\alpha}_2$, όπως επίσης και το $\vec{\beta}$ θα κείται επί της διχοτόμου της γωνίας των $\vec{\beta}_1$ και $\vec{\beta}_2$. Επομένως θα έχουμε:

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_2) + (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) + (\vec{\beta}_2, \vec{\beta}) = \frac{\psi}{2} + \phi - \psi + \frac{\psi}{2} = \phi.$$

Όπως αναφέραμε στο θεώρημα 1, ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα 5, θα ισχύει:

$$|\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}| = c_\phi \cdot |\vec{\alpha}| = \ell(1, \phi) \cdot \ell(t, \psi) = t \cdot \ell(1, \phi) \cdot \ell(1, \psi). \quad (2)$$

Επίσης έχουμε:

$$|\vec{v}| = |\vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\beta}_1| = t \cdot \ell(1, \phi + \psi) \quad (3)$$

και

$$|\vec{w}| = |\vec{\alpha}_2 \oplus \vec{\beta}_2| = t \cdot \ell(1, \phi - \psi). \quad (4)$$

ντός του $[0, \pi]$.

Αφού οι γωνίες $(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1)$ και $(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2)$ έχουν κοινή διχοτόμο, προκύπτει ότι πάνω της θα κείτονται τα $\vec{v}$ και $\vec{w}$. Επομένως από την ιδιότητα (δ') θα ισχύει $|\vec{v} \oplus \vec{w}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

Όμως επίσης από τις ιδιότητες (β') και (γ') προκύπτει:

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = (\vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\beta}_1) \oplus (\vec{\alpha}_2 \oplus \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha}_1 \oplus \vec{\alpha}_2) \oplus (\vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2) = \vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}. \quad (5)$$

Οπότε από την εξίσωση (2), την (3), την (4) και την (5), αφού $|\vec{v} \oplus \vec{w}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$, έχουμε:

$$\begin{aligned} t \cdot \ell(1, \phi) \cdot \ell(1, \psi) &= t \cdot \ell(1, \phi + \psi) + t \cdot \ell(1, \phi - \psi) \\ \Leftrightarrow \ell(1, \phi) \cdot \ell(1, \psi) &= \ell(1, \phi + \psi) + \ell(1, \phi - \psi) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\ell(1, \phi)}{2} \cdot \frac{\ell(1, \psi)}{2} &= \frac{\ell(1, \phi + \psi)}{2} + \frac{\ell(1, \phi - \psi)}{2} \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$g(\theta) = \frac{\ell(1, \theta)}{2},$$

ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση του d' Alembert, δηλαδή:

$$g(\phi + \psi) + g(\phi - \psi) = 2g(\phi)g(\psi), \text{ για κάθε } 0 \leq \psi \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως, αφού η g είναι συνεχής (ιδιότητα (ε')), θα έχει έναν από τους κάτωθι τύπους (βλ. Θεώρημα 11):

$$g(\theta) = 0 \text{ ή } g(\theta) = \cosh k\theta \text{ ή } g(\theta) = \cos k\theta,$$

με $\theta \in [0, \pi]$.

Λόγω της ιδιότητας (δ') το αξιωματικοποιημένο άθροισμα δύο ομόρροπων μοναδιαίων διανυσμάτων έχει μέτρο 2, δηλαδή $\ell(1, 0) = 2$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $g(0) = 1$. Επίσης το αξιωματικοποιημένο άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων (μοναδιαίων ή μη) είναι το $\vec{0}$, επομένως $\ell(1, \pi) = 0$, όπερ σημαίνει ότι $g(\pi) = 0$.

Καθόσον $g(0) = 1$ αποκλείεται $g(\theta) = 0$ για κάθε $\theta \in [0, \pi]$. Επίσης αποκλείεται $g(\theta) = \cosh k\theta$ για κάθε $\theta \in [0, \pi]$, αφού $g(\pi) = 0$. Έτσι έχουμε $g(\theta) = \cos k\theta$ για κάθε $\theta \in [0, \pi]$.

Οπότε πλέον από την $g(\pi) = 0$ διαπιστώνουμε ότι:

$$\cos k\pi = 0 \Leftrightarrow k\pi = \nu\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = \nu + \frac{1}{2}, \text{ με } \nu \in \mathbb{Z}.$$

- Έστω ότι $g(\theta) = \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta$ με $\nu \geq 1$. Τότε το

$$\frac{\pi}{2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \in [0, \pi]. \text{ Επομένως:}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}\right) = \cos\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

⁶ Μπορεί να ισχύει $0 \leq \psi \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, αλλά, αφού $g(\theta) = \frac{\ell(1, \theta)}{2}$ η g

Αυτό σημαίνει ότι δύο μοναδιαία διανύσματα που σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{\nu + \frac{1}{2}} < \pi$ έχουν αξιωματικο-

ποιημένο άθροισμα το 0, όπερ άτοπον αφού έχουμε δείξει ότι αυτό συμβαίνει μόνο όταν είναι αντίθετα, ήτοι αν σχηματίζουν γωνία π .

- Έστω ότι $g(\theta) = \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta$ με $\nu \leq -2$. Τότε:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(-\nu - \frac{1}{2}\right)\theta = \\ &= \cos\left((- \nu - 1) + \frac{1}{2}\right)\theta. \end{aligned}$$

Αφού $-\nu - 1 \geq 1$, η g εκφράστηκε με τον τρόπο που πριν απορρίψαμε, όπερ άτοπον.

Επομένως $\nu = 0$ ή $\nu = -1$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $g(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$. Στην δεύτερη έχουμε $g(x) = \cos\left(-\frac{1}{2}\right)\theta = \cos \frac{\theta}{2}$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε λοιπόν $g(x) = \cos \frac{\theta}{2}$.

Επομένως $\ell(1, \theta) = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ και γενικότερα:

$$\ell(t, \theta) = 2t \cos \frac{\theta}{2}.$$

□

Θεώρημα 7. Ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την αξιωματικοποιημένη άθροιση διανυσμάτων ίσου μέτρου.

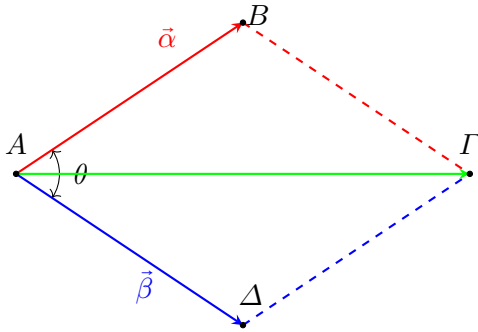
Απόδειξη. Αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν μέτρο t και σχηματίζουν γωνία θ , τότε το αξιωματικοποιημένο άθροισμά τους $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$ βρίσκεται επί της διχοτόμου της θ και έχει μέτρο $2t \cos \frac{\theta}{2}$.

Σύμφωνα με τον νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε (βλ. ΣΧΗΜΑ 11):

$$\begin{aligned} A\Gamma &= \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot B\Gamma \cdot \cos \widehat{B}} = \\ &= \sqrt{2t^2 + 2t^2 \cos(\pi - \theta)} = t\sqrt{2(1 + \cos \theta)} \\ &= t\sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2t \cos \frac{\theta}{2} \\ &= |\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}|. \end{aligned}$$

ορίζεται στο $[0, \pi]$.

Αφού λοιπόν $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} \uparrow \overrightarrow{AG}$ και επίσης $|\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}| = |\overrightarrow{AG}|$, έχουμε $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \overrightarrow{AG}$, και έτσι αποδείξαμε ότι το αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου όταν αθροίζονται διανύσματα ίσου μέτρου. $\square$

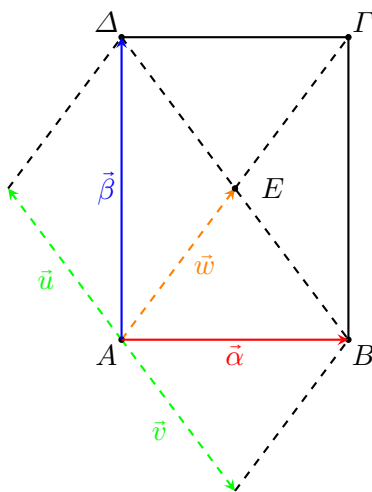


ΣΧΗΜΑ 11. Το αξιωματικοποιημένο άθροισμα και ο κανόνας του παραλληλογράμμου στα διανύσματα ίσου μέτρου.

4.γ' Αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων - γενική περίπτωση

Θεώρημα 8. Ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την αξιωματικοποιημένη άθροιση κάθετων διανυσμάτων.

Απόδειξη. Ας πάρουμε δύο κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ακολουθώντας σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαδοχικές πλευρές τα δύο αυτά διανύσματα (βλ. 12). Εν συνεχεία παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{BE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ED}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, όλα τους με αρχή το A .



ΣΧΗΜΑ 12. Το αξιωματικοποιημένο άθροισμα και ο κανόνας του παραλληλογράμμου στα κάθετα διανύσματα.

Από το θεώρημα 7 έχουμε ότι:

$$\vec{\alpha} = \vec{v} \oplus \vec{w} \text{ και } \vec{\beta} = \vec{u} \oplus \vec{w}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (β') και (γ'), έχουμε:

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = (\vec{v} \oplus \vec{w}) \oplus (\vec{u} \oplus \vec{w}) = (\vec{v} \oplus \vec{u}) \oplus (\vec{w} \oplus \vec{w}).$$

Όμως όπως δείξαμε στο θεώρημα 4 το ζεύγος $(V, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα, άρα από την ιδιότητα (δ'):

$$(\vec{v} \oplus \vec{u}) \oplus (\vec{w} \oplus \vec{w}) = \vec{w} \oplus \vec{w} = \vec{w} \oplus \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG},$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στην ιδιότητα (δ').

Έτσι αποδείξαμε ότι το αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου όταν αθροίζονται κάθετα διανύσματα. $\square$

Θεώρημα 9. Ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την αξιωματικοποιημένη άθροιση διανυσμάτων.

Απόδειξη. Έστωσαν δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = \overrightarrow{EA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{EZ}$ με κοινή αρχή (E), τα οποία σχηματίζουν οξεία γωνία (βλ. πρώτη περίπτωση στο ΣΧΗΜΑ 13). Ορίζουμε επίσης ως $\vec{\beta}_1$ την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ και ως $\vec{\beta}_2$ την προβολή του $\vec{\beta}$ στην κάθετη του $\vec{\alpha}$ στο E . Τέλος σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $EZ\Gamma A$ με πλευρές τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Από το θεώρημα 8 έχουμε $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2$. Χρησιμοποιώντας τώρα την ιδιότητα (γ') βρίσκουμε ότι:

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \vec{\alpha} \oplus (\vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}_1) \oplus \vec{\beta}_2.$$

Ξέρουμε όμως ότι $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}_1$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα (δ') έχουμε:

$$(\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}_1) \oplus \vec{\beta}_2 = (\vec{\alpha} \oplus \overrightarrow{AB}) \oplus \vec{\beta}_2 = \overrightarrow{EB} \oplus \vec{\beta}_2.$$

Από το θεώρημα 8 έχουμε όμως:

$$\overrightarrow{EB} \oplus \vec{\beta}_2 = \overrightarrow{EG}.$$

Μόλις λοιπόν αποδείξαμε ότι το αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου όταν αθροίζονται διανύσματα που σχηματίζουν οξεία γωνία.

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση όπου τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν αμβλεία γωνία (βλ. δεύτερη περίπτωση στο ΣΧΗΜΑ 13). Όπως και πριν, ορίζουμε ως $\vec{\beta}_1$ την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ και ως $\vec{\beta}_2$ την προβολή του $\vec{\beta}$ στην κάθετη του $\vec{\alpha}$ στην αρχή του A , ενώ συγχρόνως σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο με διαδοχικές πλευρές τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Από το θεώρημα 8 έχουμε $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2$. Ακολουθώντας, από την ιδιότητα (γ') ανακαλύπτουμε ότι:

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \vec{\alpha} \oplus (\vec{\beta}_1 \oplus \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}_1) \oplus \vec{\beta}_2.$$

Από την ιδιότητα (δ') έχουμε $\vec{\alpha} = \vec{AB} \oplus \vec{B\Delta}$. Άρα, λόγω πάλι της ιδιότητας (γ') προκύπτει ότι:

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}_1 = (\vec{AB} \oplus \vec{B\Delta}) \oplus \vec{\beta}_1 = \vec{AB} \oplus (\vec{B\Delta} \oplus \vec{\beta}_1).$$

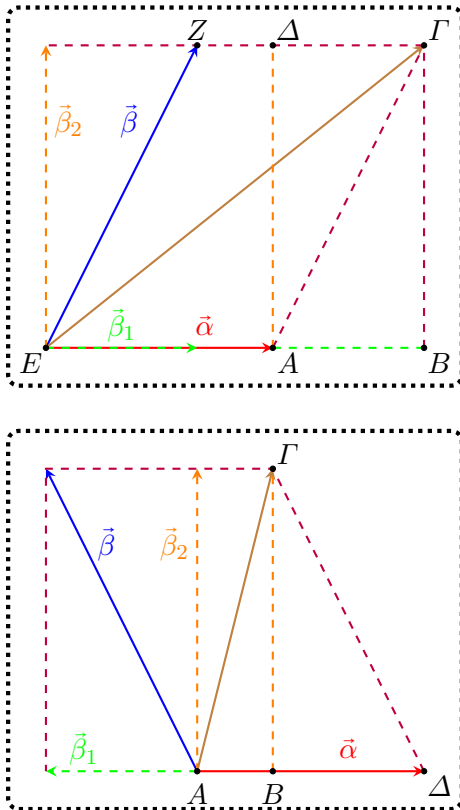
Είναι εύλογο ότι τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\beta}_1$ είναι αντίθετα, οπότε, αφού το ζεύγος $(\mathcal{V}, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα, ισχύει $\vec{B\Delta} \oplus \vec{\beta}_1 = \vec{0}$, άρα, για τον ίδιο λόγο:

$$\vec{AB} \oplus (\vec{B\Delta} \oplus \vec{\beta}_1) = \vec{AB} \oplus \vec{0} = \vec{AB}.$$

Έτσι $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \vec{AB} \oplus \vec{\beta}_2$ απ' όπου από το θεώρημα 8 διαπιστώνουμε ότι:

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \vec{AG}.$$

Εν τέλει, λοιπόν, αποδείξαμε ότι το αξιωματικοποιημένο άθροισμα διανυσμάτων προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου όταν αθροίζονται διανύσματα που σχηματίζουν αμβλεία γωνία, εξαντλώντας μ' αυτόν τον τρόπο κάθε πιθανή περίπτωση διανυσμάτων. $\square$



ΣΧΗΜΑ 13. Το αξιωματικοποιημένο άθροισμα και ο κανόνας του παραλληλογράμμου σε μη κάθετα διανύσματα.

⁷Για την ακρίβεια, υπάρχουν διάφορες προσθετικές συναρτησιακές εξισώσεις του Cauchy. Όλες τους ξεκινάνε με την συνθήκη:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

5 Παράρτημα- Συναρτησιακές εξισώσεις

Θεώρημα 10. Έστω συνάρτηση

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty),$$

η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (6)$$

για κάθε $x, y \geq 0$. Λέμε τότε ότι η f ικανοποιεί την **προσθετική συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy**⁷ και υπάρχει σταθερά $c \geq 0$:

$$f(x) = cx, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Στην περίπτωση μάλιστα που δεν είναι παντού 0 έχουμε $c > 0$.

Απόδειξη. Αρχικά⁸ θέτουμε $x = y = 0$ στην εξίσωση (6), οπότε προκύπτει:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Έστω τώρα η πρόταση:

$$\Pi[n] : f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

, για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

Εξορισμού της f ισχύει η $\Pi[2]$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η $\Pi[n]$, τότε:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) \stackrel{\text{εξ. (6)}}{=} \\ &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \stackrel{\Pi[n]}{=} \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Αφού αληθεύουν οι:

- $\Pi[2]$ και
- $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} (\Pi[n] \Rightarrow \Pi[n+1])$,

λόγω Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει ότι αληθεύει η $\Pi[n]$ για κάθε φυσικό $n \geq 2$.

Έτσι, για $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ έχουμε:

$$f(nx) = nf(x). \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας το x με $\frac{x}{n}$ στην εξίσωση (7) έχουμε:

$$f(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x). \quad (8)$$

και από κει και πέρα εξειδικεύουν το πεδίο ορισμού της f , το σύνολο τιμών της ή άλλα χαρακτηριστικά της f , όπως η συνέχεια, η παραγωγισιμότητα κτλ.

⁸Εδώ η απόδειξη βασίζεται στο [1], όπου έχουν γίνει μόνο κάποιες μικρές προσαρμογές.

Έστω μη αρνητικός ρητός $q = \frac{\alpha}{\beta}$. Έχουμε:

$$f(qx) = f\left(\alpha \frac{x}{\beta}\right) \stackrel{(7)}{=} \alpha f\left(\frac{x}{\beta}\right) \stackrel{(8)}{=} \frac{\alpha}{\beta} f(x) = qf(x). \quad (9)$$

Θέτοντας $x = 1$ στην (9) έχουμε:

$$f(q) = cq, \text{ για κάθε μη αρνητικό } q \in \mathbb{Q}, \quad (10)$$

όπου $c = f(1)$.

Στο σημείο αυτό θα δείξουμε ότι η f είναι αύξουσα⁹. Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$:

$$f(x_2) = f(x_1 + (x_2 - x_1)) \stackrel{\text{εξ.}(6)}{=} f(x_1) + f(x_2 - x_1) \geq f(x_1),$$

καθόσον η f υποτέθηκε μη αρνητική.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα $x > 0$ και ας είναι:

$$A_n = \left(x - \frac{1}{n}, x\right) \text{ και } B_n = \left(x, x + \frac{1}{n}\right)$$

δύο ακολουθίες διαστημάτων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν $\hat{x}_n, \tilde{x}_n \in \mathbb{Q}$ τέτοια, ώστε:

$$\hat{x}_n \in A_n \text{ και } \tilde{x}_n \in B_n.$$

Αφού οι ακολουθίες $\alpha_n = x - \frac{1}{n}$, $\beta_n = x + \frac{1}{n}$ και $\gamma_n = x$ συγκλίνουν στο x , χάρις στο κριτήριο παρεμβολής διαπιστώνουμε ότι αμφότερες και οι ακολουθίες $\hat{x}_n$ και $\tilde{x}_n$ συγκλίνουν στο x . Επίσης, λόγω του ότι η f είναι αύξουσα προκύπτει:

$$\hat{x}_n < x < \tilde{x}_n \Rightarrow f(\hat{x}_n) < f(x) < f(\tilde{x}_n) \stackrel{\text{εξ.}(10)}{\Leftrightarrow}$$

$$\hat{x}_n f(1) < f(x) < \tilde{x}_n f(1).$$

Αφού οι ακολουθίες $\hat{x}_n f(1)$ και $\tilde{x}_n f(1)$ συγκλίνουν στο $xf(1)$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $f(x) = xf(1)$. Εν ολίγοις έχουμε:

$$f(x) = cx, \text{ για κάθε } x \geq 0,$$

όπου φυσικά $c = f(1)$.

Αφού τώρα η f έχει μη αρνητικές τιμές, θα ισχύει $f(1) \geq 0$, άρα $c \geq 0$.

Αν η f δεν είναι παντού 0, τότε $c > 0$, διότι αν $c = 0$, θα είχαμε $f(x) = 0x = 0$ για κάθε $x \geq 0$, όπερ άτοπον. $\square$

⁹ Αν είχε υποτεθεί ότι η f είναι συνεχής, δεν θα έμενε παρά ελάχιστο για την απόδειξη. Τοιαύτη περίπτωση, αφού για κάθε $x \geq 0$ θα υπήρχε μια ακολουθία $x_n \in \mathbb{Q}$ συγκλίνουσα στο x , θα είχαμε ότι:

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{f \in C^0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{\text{εξ.}(10)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(1) = xf(1).$$

Εν προκειμένω, όμως, δεν έχουμε κάνει αυτή την παραδοχή.

Θεώρημα 11. Έστω συνάρτηση

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad (11)$$

για κάθε $0 \leq y \leq x$. Λέμε τότε ότι η f ικανοποιεί την **συναρτησιακή εξίσωση του d'Alembert** και, αν η f είναι συνεχής, τότε οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι:

$$f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \geq 0 \quad (12)$$

ή

$$f(x) = \cosh(\lambda x), \text{ για κάθε } x \geq 0 \quad (13)$$

ή

$$f(x) = \cos(\lambda x), \text{ για κάθε } x \geq 0. \quad (14)$$

για κάποια σταθερά $\lambda \geq 0$.

Απόδειξη. Είναι¹⁰ προφανές ότι η περίπτωση (12) ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (11). Θα εξετάσουμε λοιπόν τις μη μηδενικές λύσεις της.

Έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει:

$$f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Αν θέσουμε $y = 0$ στην εξίσωση (11) τότε προκύπτει ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x+0) + f(x-0) &= 2f(x)f(0) \Leftrightarrow \\ 2f(x) &= 2f(x)f(0) \Leftrightarrow \\ f(x)(f(0)-1) &= 0. \end{aligned}$$

Αν $f(0) \neq 0$, τότε από την τελευταία ισότητα θα έχουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$, όπερ άτοπον.

Αφού η f υποτέθηκε συνεχής, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 > 0,$$

επομένως θα έχουμε ότι $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του 0. Με άλλα λόγια υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in [0, \varepsilon].$$

Ας υποθέσουμε ότι:

$$f(\varepsilon) \leq 1. \quad (15)$$

Στο [1] γίνεται χρήση του γεγονότος ότι η f είναι μη αρνητική στα μη αρνητικά x . Εδώ θα βασιστούμε στην μονοτονία της f . Τόσο η μη αρνητικότητα της f , όσο και η μονοτονία της είναι ισοδύναμα με τη συνέχειά της (βλ. [5]), πράγμα που επίσης δεν θα θεωρήσουμε δεδομένο στην παρούσα απόδειξη.

¹⁰ Η απόδειξη είναι αυτή του [1]. και απλά έχουν προστεθεί κάποιες μόνο διασαφηνίσεις από τη μεριά του γράφοντος.

Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, \varepsilon]$, θα υπάρξει $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε:

$$\cos \alpha = f(\varepsilon)$$

Αντικαθιστώντας τα x και y στην εξίσωση (11) με $\frac{x}{2}$ προκύπτει ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) &= 2f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ f(x) + f(0) &= 2f^2\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} \end{aligned} \quad (16)$$

$$f(x) + 1 = 2f^2\left(\frac{x}{2}\right). \quad (17)$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση:

$$\Pi_1[n] : f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

Μέχρι τώρα ξέρουμε ότι ισχύει η $\Pi_1[0]$.

Θεωρώντας την $\Pi_1[n]$ αληθή και θέτοντας $x = \frac{\varepsilon}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) στην (17) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^n}$ προκύπτει ότι:

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) + 1 = 2f^2\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2^n} + 1 = 2f^2\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}} - 1\right) + 1 = 2f^2\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}. \quad (20)$$

Αφού $f(x) > 0$ για $x \in [0, \varepsilon]$ και $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, ισχύει αμφοτέρωθεν ότι:

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) > 0 \text{ και } \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0, \quad (21)$$

συνεπώς έχουμε:

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}},$$

το οποίο είναι η $\Pi_1[n+1]$, κι έτσι αποδείξαμε ότι:

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*. \quad (22)$$

Τώρα θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση:

$$\Pi_2[m] : f\left(\frac{m}{2^n}\varepsilon\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right).$$

Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι ισχύουν οι προτάσεις $\Pi_2[0]$ και $\Pi_2[1]$ κι αν υποθέσουμε ότι ισχύουν επίσης οι $\Pi_2[m-1]$ και $\Pi_2[m]$.

Θέτουμε στην εξίσωση (11) $x = \frac{m\varepsilon}{2^n}$ και $y = \frac{\varepsilon}{2^n}$ κι έτσι έχουμε:

$$f\left(\frac{m\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) + f\left(\frac{m\varepsilon}{2^n} - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{m\varepsilon}{2^n}\right)f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\varepsilon\right) + f\left(\frac{m-1}{2^n}\varepsilon\right) = 2f\left(\frac{m}{2^n}\varepsilon\right)f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\varepsilon\right) = 2f\left(\frac{m}{2^n}\varepsilon\right)f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) - f\left(\frac{m-1}{2^n}\varepsilon\right)$$

Λόγω των (22), $\Pi_2[m-1]$ και $\Pi_2[m]$ έχουμε ότι:

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^n},$$

$$f\left(\frac{m-1}{2^n}\varepsilon\right) = \cos\left(\frac{m-1}{2^n}\alpha\right) \text{ και}$$

$$f\left(\frac{m}{2^n}\varepsilon\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right).$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m+1}{2^n}\varepsilon\right) &= 2 \cos\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) \cos \frac{\alpha}{2^n} - \cos\left(\frac{m-1}{2^n}\alpha\right) = \\ &= \cos\left(\frac{m+1}{2^n}\alpha\right), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι απόρροια της ταυτότητας:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y. \quad (23)$$

Έχουμε δείξει, λοιπόν, ότι:

$$f\left(\frac{m}{2^n}\varepsilon\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right), \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$ και:

$$\overline{\Delta_k \Delta_{k-1} \dots \Delta_0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots}$$

το ανάπτυγμά του στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Τοιαύτη περιπτώσει η ακολουθία ρητών:

$$q_\nu = \Delta_k 2^k + \Delta_{k-1} 2^{k-1} + \dots + \Delta_0 + \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2^2} + \frac{\delta_3}{2^3} + \dots + \frac{\delta_\nu}{2^\nu}$$

με $\nu \in \mathbb{N}^*$ συγκλίνει στο x .

Όμως $q_\nu = \frac{\mu}{2^\nu}$, όπου $\mu = \Delta_k 2^{k+\nu} + \Delta_{k-1} 2^{k-1+\nu} + \dots + \Delta_0 2^\nu + \delta_1 2^{\nu-1} + \delta_2 2^{\nu-2} + \delta_3 2^{\nu-3} + \dots + \delta_\nu \in \mathbb{N}$.

Επομένως λόγω της (24) ισχύει ότι:

$$f(q_\nu \varepsilon) = \cos(q_\nu \alpha).$$

Αφού τόσο η f , όσο και το συνημίτονο είναι συνεχείς συναρτήσεις και καθόσον $q_\nu \rightarrow x$, έχουμε:

$$f(x\varepsilon) = \cos(x\alpha), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε το x με $\frac{x}{\varepsilon}$ έχουμε:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) = \cos(\lambda x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{με } \lambda = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

Είχαμε υποθέσει ότι $f(\varepsilon) \leq 1$ (βλ. (15)). Ας δούμε τι γίνεται τώρα αν $f(\varepsilon) > 1$. Τοιαύτη περίπτωση υπάρχει κάποιο $\alpha > 0$ τέτοιο, ώστε $\cosh \alpha = f(\varepsilon)$.

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι τα μόνα σημεία της περίπτωσης « $f(\varepsilon) \leq 1$ » στα οποία ε-νεπλάκη το συνημίτονο ήταν τα (19), (21), (23) και η συνέχεια της $\cos$. Όμως και το υπερβολικό συνημίτονο είναι συνεχής συνάρτηση κι επίσης και γι' αυτή τη συνάρτηση ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις:

- $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\cosh x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh x \cosh y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Όπερ σημαίνει ότι τεχνικά η απόδειξή της περίπτωσης « $f(\varepsilon) > 1$ » είναι πανομοιότυπη με της της « $f(\varepsilon) \leq 1$ », με τη διαφορά ότι αντί για $\cos$ έχουμε $\cosh$.

Κατά συνέπεια με το δεδομένο ότι $f(\varepsilon) > 1$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα:

$$f(x) = \cosh\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) = \cosh(\lambda x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{με } \lambda = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

□

Αναφορές

- [1] J. Aczél και J. Dhombres. *Functional equations in several variables*. Cambridge University Press, 2008 (έκδοση 1989).
- [2] H. Athen. *The Teaching of Vectors in the German Gymnasium I. The Mathematics Teacher*. 59(4), 382-393, 1966.
- [3] J. Cable. *What Is a Vector? The Mathematical Gazette*. 48(363), 34-36, 1964.
- [4] A. Einstein και L. Infeld. *Η Εξέλιξη των Ιδεών στη Φυσική*. Δωδώνη. 1978.
- [5] Pl. Kannappan. *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer. 2009.
- [6] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism Vol. 1*. Clarendon Press. 1873.
- [7] S. D. Poisson. *A Treatise of Mechanics Vol. 1*. Longman and Co. 1842.
- [8] H. D. Young, R. A. Freeman και A. Lewis Ford. *Sears and Zemansky's university physics: with modern physics*. Pearson Addison-Wesley. 2008.
- [9] J. R. Young. *The elements of mechanics*. John Souther, St' Paul's Church Yard, 1832.
- [10] M. Lange. *A Tale of Two Vectors. Dialectica*. 63(4), 397-431, 2009.
- [11] M. Lange. *Because Without Cause. Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*. Oxford University Press, 2017.
- [12] Α. Αδαμόπουλος, Β. Βισκαδουράκης, Δ. Γαβαλάς, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. *Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού, Β' Γενικού Λυκείου. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»*. 2021.

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΘΩΜΑΪΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Θεσσαλονίκης, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
 ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΓΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Θεσσαλονίκης, Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Μακεδονίας
 ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΑΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Αθηνών, πρώην Σύμβουλος Α' στο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
 ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΜΟΥΤΡΟΥΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Chicago, Μουσικό Σχολείο Αγρινίου
 ΣΙΛΟΥΑΝΟΣ ΜΠΡΑΖΙΤΙΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Μαθηματικών Παν. Αθηνών, Postdoctoral Fellow, University of Edinburgh
 ΜΙΧΑΗΛ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. California, Los Angeles, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παν. Κρήτης
 ΣΤΑΥΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Κρήτης, Ιδιωτική Εκπαίδευση, Χαλκίδα
 ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΣΥΝΕΦΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Cornell, Εκπαιδευτήρια Ράπτου, Λάρισα
 ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Stanford, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Παν. Αθηνών
 ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΡΙΣΤΟΦΙΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Cambridge, Assistant Professor in Mathematics, UCLan Cyprus