

Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

ΦΤΑΛΟ 27, 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα
Διανέμεται & αναπαράγεται ελεύθερα
e-mail: info@ekthetis.gr
Δικτυακός Τόπος:
<http://www.ekthetis.gr/>
Στοιχειοθετείται με το L^AT_EX2ε
Έκδοση-Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Διευθύνεται από Συντακτική Επιτροπή

*Μια διαμάχη για ένα θέμα Τριγωνομετρίας με ψευδείς
υποθέσεις που τέθηκε στις εισαγωγικές εξετάσεις της
Μαθηματικής Σχολής Αθηνών* το 1947*

Γιάννης Θωμάδης
Δρ. Μαθηματικών
τ. Σχολικός Σύμβουλος

Περίληψη

Η εργασία που ακολουθεί είναι η πρώτη μιας σειράς με γενικό τίτλο «Στιγμιότυπα και Εικόνες από την Ιστορία της Νεοελληνικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης», στην οποία σκοπεύουμε να παρουσιάσουμε αποτελέσματα ερευνών για ορισμένα χαρακτηριστικά «επεισόδια» από την ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Σε αυτές θα αναλύονται με κριτικό τρόπο γεγονότα που παρουσιάζουν κατά τη γνώμη του γράφοντος ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους εξής λόγους:

- Αναδεικνύουν τις αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών που ήταν κυρίαρχες μια συγκεκριμένη εποχή.
- Προβάλλουν προσωπικότητες που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση και την εξέλιξη της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης.
- Έχουν προεκτάσεις στη σημερινή εποχή και συμβάλουν στην κατανόηση αντίστοιχων προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Ένα επίμαχο θέμα Τριγωνομετρίας στις εισαγωγικές εξετάσεις του 1947	2
2 Η επίλυση του θέματος σε δύο πηγές εκείνης της εποχής	2
3 Η προϊστορία του θέματος στην ελληνική βιβλιογραφία	4
4 Οι γεωμετρικές ανισότητες στην ελληνική βιβλιογραφία	5
5 Η διαμάχη Βαρόπουλου και Πάλλα για το θέμα Τριγωνομετρίας του 1947	7
6 Μια ανάλυση του περιεχομένου της διαμάχης	8
7 Με ποια κριτήρια οι καθηγητές του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας επέλεξαν τη συγκεκριμένη άσκηση ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων;	10
8 Η επιβίωση του θέματος Τριγωνομετρίας του 1947 στη νεότερη βιβλιογραφία	11
9 Μερικές προεκτάσεις στη σύγχρονη εποχή	14
Βιβλιογραφικές παραπομπές	15

* Ο όρος «Μαθηματική Σχολή Αθηνών» αναφέρεται και στις δύο πηγές από τις οποίες έχουμε αντλήσει πληροφορίες για το συγκεκριμένο θέμα των εισαγωγικών εξετάσεων (βλ. στη δεύτερη ενότητα παρακάτω). Με αυτόν τον όρο υπονοείται προφανώς το μαθηματικό τμήμα της Σχολής Φυσικών και Μαθηματικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών, η οποία είχε ιδρυθεί με Βασιλικό Διάταγμα που δημοσιεύτηκε στο Φ.Ε.Κ. Α' 116 της 3ης Ιουνίου 1904.

Εισαγωγή

Σε μια εργασία που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Απολλώνιος το 2004 ([2], σσ.29-33) καθώς και στο βιβλίο Μαθηματικά & Εξετάσεις που εκδόθηκε το 2009 ([3], σσ.13-16), είχα χρησιμοποιήσει ένα παλιό θέμα εισαγωγικών εξετάσεων στα Α.Ε.Ι. για να δείξω τη διαχρονικότητα της αυθαιρεσίας που χαρακτηρίζει συχνά τις επιλογές των θεματοδοτών. Η διαπραγμάτευση του ζητήματος σε εκείνες τις εργασίες ήταν αναγκαστικά ελλιπής, και είχα υποσχεθεί να παρουσιάσω μια λεπτομερή ανάλυση στο μέλλον.

Το συγκεκριμένο ζήτημα αφορά ένα θέμα Τριγωνομετρίας που τέθηκε το 1947 στις εισαγωγικές εξετάσεις του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας. Εκείνη την εποχή οι εξετάσεις διεξάγονταν με ευθύνη των αντίστοιχων πανεπιστημιακών σχολών, οι καθηγητές των οποίων επέλεγαν τα θέματα και βαθμολογούσαν τα γραπτά των υποψηφίων.¹ Στα Μαθηματικά οι υποψήφιοι εξετάζονταν χωριστά σε Άλγεβρα, Γεωμετρία και Τριγωνομετρία και τα θέματα κάθε σχολής ήταν διαφορετικά.

Μια επισκόπηση των θεμάτων των εισαγωγικών εξετάσεων των προηγούμενων ετών, και η σύγκριση τους με τα περιεχόμενα των αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών βιβλίων εκείνης της εποχής, δείχνει σημαντικές αποκλίσεις ως προς το βαθμό δυσκολίας (αναμενόμενο) αλλά και μια τάση των θεματοδοτών (ιδιαίτερα του Πολυτεχνείου) να κινούνται συχνά στα όρια της εξεταστέας ύλης. Αυτή η κατάσταση είχε δώσει ισχυρή ώθηση στην ανάπτυξη της φροντιστηριακής μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία από τα μέσα της δεκαετίας του 1930 παρουσίαζε έντονη εκδοτική δραστηριότητα. Αυτή περιλάμβανε κυρίως ογκώδεις συλλογές ασκήσεων προσαρμοσμένες στη θεματολογία των εισαγωγικών εξετάσεων, καθώς και διάφορα μαθηματικά περιοδικά με αντίστοιχη θεματολογία (περισσότερα στοιχεία για το συγκεκριμένο ζήτημα υπάρχουν στις εργασίες [4] και [6]).

1 Ένα επίμαχο θέμα Τριγωνομετρίας στις εισαγωγικές εξετάσεις του 1947

Το 1947, στις Εισαγωγικές Εξετάσεις του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας, το πρώτο από τα δύο θέματα Τρι-

¹Το Υπουργείο Παιδείας αφαιρέσε την ευθύνη διεξαγωγής των εξετάσεων από τα Α.Ε.Ι. στις αρχές της δεκαετίας του 1960, ύστερα από μία συρροή αυθαιρεσιών στην επιλογή των θεμάτων σε διάφορες σχολές που προκάλεσαν έντονες διαμαρτυρίες και πολλά δημοσιεύματα στον τύπο. Πρόκειται για ένα σημαντικό γεγονός που συνδέεται με την ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης και με το οποίο σκοπεύουμε να ασχοληθούμε σε μια επόμενη εργασία. Ορισμένες πληροφορίες για ένα λανθασμένο θέμα Άλγεβρας που τέθηκε στις εισαγωγικές εξετάσεις της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. το 1962 υπάρχουν στο [3], σσ.16-17.

γωνομετρίας που έθεσαν οι εξεταστές ήταν το εξής (διατηρούμε το πολυτονικό σύστημα και την ορθογραφία της εποχής):

Ἐὰν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1$$

καὶ

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2,$$

τότε νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας ἰσοῦται πρὸς :

$$\alpha\beta\gamma : (\alpha + \beta + \gamma)^2,$$

ἔνθα α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Σημειώνουμε εξ αρχής, χρησιμοποιώντας δύο φράσεις που εισήλθαν πρόσφατα στην καθ' ημάς εξεταστική ορολογία, ότι στο προηγούμενο θέμα υπάρχει μία «ασύμβατη υπόθεση» η οποία όμως «ουδόλως επηρεάζει την επίλυση του θέματος».²

Επειδή σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ανισότητα³

$$1 < \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{3}{2} \quad (A)$$

είναι φανερό ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με τις ιδιότητες που αναφέρονται στη διατύπωση του προηγούμενου θέματος. Η ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$$

αποτελεί την «ασύμβατη υπόθεση» που προαναφέραμε.

Σύμφωνα με στοιχειώδεις γνώσεις της μαθηματικής λογικής, εφόσον η σύζευξη των δύο υποθέσεων

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$$

είναι ψευδής πρόταση, οποιαδήποτε συνεπαγωγή με προκείμενη αυτή τη σύζευξη θα είναι αληθής. Άρα, από τη σκοπιά της μαθηματικής λογικής, η ζητούμενη απόδειξη της πρότασης

$$\left. \begin{array}{l} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

έχει ολοκληρωθεί (όπου με το R συμβολίζεται η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ) .

²Τις φράσεις «ασύμβατη υπόθεση» και «ουδόλως επηρεάζει την επίλυση του θέματος» χρησιμοποίησε σε ανακοίνωσή της η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων το 2013 για να δικαιολογήσει μία εσφαλμένη επιλογή των θεματοδοτών στις εξετάσεις του μαθήματος «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας» των Εσπερινών Γενικών Λυκείων και των ΕΠΑ.Λ. Με το ζήτημα αυτό θα ασχοληθούμε στην τελευταία ενότητα της εργασίας.

³Υπάρχει μεγάλος αριθμός αποδείξεων της συγκεκριμένης ανισότητας στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία (βλ. ενδεικτικά στα [12], σ.47 και [32], σσ.59-62).

Φυσικά οι θεματοδότες του μαθηματικού τμήματος το 1947 είχαν άλλη άποψη για την επίλυση του συγκεκριμένου θέματος. Μπορεί πράγματι κάποιος λύτης που αγνοεί την ανισότητα (A) να ασχοληθεί σοβαρά με τις δύο δεδομένες ισότητες, να χρησιμοποιήσει γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους για τις γωνίες και τις πλευρές ενός τριγώνου και με διάφορους μετασχηματισμούς να καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την άποψη, η δοθείσα «ασύμβατη υπόθεση» μπορεί να θεωρηθεί ότι «ουδόλως επηρεάζει την επίλυση του θέματος».

Ένα επίμαχο ζήτημα, που φαίνεται όμως ότι δεν προβληματίζει τους υποστηρικτές της προηγούμενης άποψης, είναι το εξής: Στην πορεία προς το ζητούμενο με χρήση της ισότητας $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G = 2$ που δεν ισχύει σε κανένα τρίγωνο, ελλοχεύει ανά πάσα στιγμή ο κίνδυνος να εμφανιστούν ενδιάμεσα αποτελέσματα (δηλαδή γεωμετρικές και τριγωνομετρικές σχέσεις) που δεν έχουν καμία σχέση με τα τρίγωνα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

2 Η επίλυση του θέματος σε δύο πηγές εκείνης της εποχής

Βασικές πηγές για την ακριβή διατύπωση και τον τρόπο επίλυσης του συγκεκριμένου θέματος εκείνη την εποχή αποτελούν το *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* που εξέδιδε ο Αριστείδης Πάλλας ([19], σ.51)⁴ και το περιοδικό Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Π.Δ.Ε.Μ.Ε.), που είναι ο πρόγονος του σημερινού Ευκλείδη. Στο τελευταίο, εκτός από εργασίες και ασκήσεις για τα στοιχειώδη και τα ανώτερα Μαθηματικά, δημοσιεύονταν επίσης κάθε χρόνο τα θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων στα Α.Ε.Ι. ([1] σ.302).

Η επίλυση του θέματος στις δύο προαναφερθείσες πηγές γίνεται ως εξής (με τ , ρ και E συμβολίζονται η ημιπερίμετρος, η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και το εμβαδόν του τριγώνου):

Στο Π.Δ.Ε.Μ.Ε., για την απόδειξη της ζητούμενης σχέσης

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:⁵

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{G}{2} \quad (1)$$

$$\rho = (\tau - \alpha)\epsilon\phi\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\tau - \alpha = R(\eta\mu B + \eta\mu G - \eta\mu A) \quad (3)$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu G} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu G} = 2R \quad (4)$$

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau\rho} \quad (5)$$

Από το δεδομένο $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G = 2$ και την (1) προκύπτει η ισότητα

$$4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{G}{2} = 1 \quad (6)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει (μετά από παραγοντοποίηση της παράστασης $\eta\mu B + \eta\mu G - \eta\mu A$) ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι

$$\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{G}{2} \quad (7)$$

Από τις (6) και (7) προκύπτει η ισότητα

$$\rho = R \quad (8)$$

Από το δεδομένο $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu G = 1$, την (4) και την (8) προκύπτει η ισότητα

$$\tau = R = \rho \quad (9)$$

Από τις (5) και (9) προκύπτει ότι .

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau^2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* του Πάλλα χρησιμοποιείται μια παρόμοια μέθοδος, αλλά είναι φανερό ότι ο λύτης καταβάλλει προσπάθεια ώστε να μην εμφανιστούν με άμεσο τρόπο οι αδύνατες ισότητες (8) και (9) που περιέχονται στη λύση του Π.Δ.Ε.Μ.Ε. Αρχικά προκύπτει με τον ίδιο τρόπο η ισότητα (6), η οποία με χρήση των ταυτοτήτων

$$\begin{aligned} \eta\mu\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}, \\ \eta\mu\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}, \\ \eta\mu\frac{G}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (10)$$

γράφεται

$$\frac{4(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

και με χρήση του τύπου του Ήρωνα

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} \quad (11)$$

⁴Το Δελτίο αυτό, που εξέδιδε ο Πάλλας από το 1947 μέχρι το 1981 με τις εκφωνήσεις, τις λύσεις και σχολιασμό των θεμάτων αποτελεί μια πολύτιμη πηγή για την ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

⁵Σε αυτή και την επόμενη ενότητα χρησιμοποιείται μεγάλος αριθμός τριγωνομετρικών σχέσεων για τα στοιχεία ενός τριγώνου, οι

οποίες μέχρι και τα τέλη της δεκαετίας του 1970 συγκροτούσαν το θεωρητικό κορμό της σχολικής Τριγωνομετρίας (βλ. τα [16], [20] και [23]). Μετά την κατάργηση της Τριγωνομετρίας ως ανεξάρτητου μαθήματος οι περισσότερες από αυτές εμφανίζονται ως αλγεβρικές ή γεωμετρικές προτάσεις και ασκήσεις. Σχετικά με αυτό το ζήτημα είναι επίσης όσα αναφέρονται στις υποσημειώσεις 3 και 6.

γίνεται

$$4E^2 = \tau\alpha\beta\gamma \quad (12)$$

Στη συνέχεια, από το δεδομένο $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 1$ και την ταυτότητα

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\mu\frac{A}{2}\sigma\mu\frac{B}{2}\sigma\mu\frac{\Gamma}{2} \quad (13)$$

προκύπτει η ισότητα

$$4\sigma\mu\frac{A}{2}\sigma\mu\frac{B}{2}\sigma\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 \quad (14)$$

Από την τελευταία, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} \sigma\mu\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}, \\ \sigma\mu\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}, \\ \sigma\mu\frac{\Gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (15)$$

και τον τύπο του Ήρωνα, έπεται η ισότητα

$$4\tau E = \alpha\beta\gamma \quad (16)$$

Από τις (12) και (16) προκύπτει η ισότητα

$$E = \tau^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{4}$$

και από την τελευταία με χρήση της (5) η ζητούμενη σχέση.

Όπως διαπιστώσαμε ήδη, ο κίνδυνος να εξαχθούν στην πορεία της ζητούμενης απόδειξης ορισμένα παράλογα αποτελέσματα επαληθεύτηκε άμεσα στη λύση που δημοσιεύτηκε στο Π.Δ.Ε.Μ.Ε.

Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $R \geq 2\rho$ και

$$\tau \geq 3\sqrt{3} \cdot \rho$$

που ισχύουν σε κάθε τρίγωνο και τις «ισότητες» $R = \rho$ και $\tau = \rho$ της προηγούμενης λύσης, καταλήγουμε στη λογικά έγκυρη αλλά μαθηματικά παράλογη πρόταση:

$$\text{Αν } \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 1 \text{ και } \sigma\mu A + \sigma\mu B + \sigma\mu\Gamma = 2, \text{ τότε } 1 \geq 2 \text{ και } 1 \geq 3\sqrt{3}^6$$

Τα προηγούμενα εγείρουν ένα ερώτημα το οποίο θα μας απασχολήσει στη συνέχεια:

• Με ποια μαθηματικά, διδακτικά ή και στενά αξιολογικά κριτήρια, θα μπορούσε η απόδειξη μιας τέτοιας πρότασης να τεθεί ως θέμα εξετάσεων εισαγωγής φοιτητών σε ένα τμήμα Μαθηματικών;

⁶Οι ανισότητες $R \geq 2\rho$ και

$$\tau \geq 3\sqrt{3} \cdot \rho$$

δεν ήταν άγνωστες στην ελληνική μαθηματική κοινότητα το 1947 (βλ. π.χ. για την πρώτη στο [25] και για τη δεύτερη στο [15], σ.110). Επισημαίνουμε επίσης τη στενή σχέση των ανισοτήτων

$$1 < \sigma\mu A + \sigma\mu B + \sigma\mu\Gamma \leq \frac{3}{2}$$

3 Η προϊστορία του θέματος στην ελληνική βιβλιογραφία

Στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* του 1947 (σ.51), αμέσως μετά τη διατύπωση του συγκεκριμένου θέματος αναφέρεται ότι:

(Ευρίσκεται εις τὴν Μ. Σ. Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ Α. ΠΑΛΛΑ, ὑπ' Ἀριθ. 349).

Η αναφορά αυτή παραπέμπει στο βιβλίο του Πάλλα *Μεγάλη Συλλογή Ασκήσεων Τριγωνομετρίας* που είχε εκδοθεί το 1936, ενώ τον επόμενο χρόνο κυκλοφόρησε ως ανεξάρτητος τόμος το [18] με τις λύσεις των περιεχομένων ασκήσεων. Στη σ.116 του τελευταίου λύνεται η ακόλουθη άσκηση (διατηρούμε τη σύνταξη του συγγραφέα):

349) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 1$, $\sigma\mu A + \sigma\mu B + \sigma\mu\Gamma = 2$. Δείξατε ὅτι $\rho = \tau$, ἔνθα $\rho = \acute{\alpha}\kappa\tau\iota\varsigma \acute{\epsilon}\gamma\gamma\epsilon\gamma\rho\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\upsilon$.

Όπως βλέπουμε το ζητούμενο της άσκησης στο βιβλίο του Πάλλα δεν είναι εκείνο του θέματος των εισαγωγικών εξετάσεων, αλλά ένα από τα ενδιάμεσα παράλογα αποτελέσματα της λύσης που είχε δημοσιευτεί στο Π.Δ.Ε.Μ.Ε.

Στο βιβλίο του Πάλλα οι δεδομένες ισότητες χρησιμοποιούνται για να αποδειχθούν αρχικά οι ισότητες (6) και (14) της προηγούμενης ενότητας, από τις οποίες συνάγεται ότι είναι

$$\epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\frac{B}{2}\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 1 \quad (17)$$

Στη συνέχεια, από τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\frac{A}{2} &= \frac{\rho}{\tau-\alpha}, \\ \epsilon\varphi\frac{B}{2} &= \frac{\rho}{\tau-\beta}, \\ \epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} &= \frac{\rho}{\tau-\gamma} \end{aligned} \quad (18)$$

και την (17) προκύπτει ότι $\rho^3 = (\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$ από την οποία, σύμφωνα με τον τύπο του Ήρωνα και τον τύπο

$$E = \tau\rho \quad (19)$$

συνάγονται διαδοχικά οι ισότητες

$$\rho^3\tau = E^2 \Rightarrow \rho^3\tau = \rho^2\tau^2 \Rightarrow \rho = \tau$$

και $R \geq 2\rho$ μέσω της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sigma\mu A + \sigma\mu B + \sigma\mu\Gamma = 1 + \frac{\rho}{R}$$

Η τελευταία περιείχονταν από τις αρχές του 20ου αιώνα στα περισσότερα βιβλία ή συλλογές ασκήσεων Τριγωνομετρίας. (Βλ. π.χ. στο [30], σ.41, άσκηση 1200).

Η ιστορία αυτού του εμφανώς παράλογου αποτελέσματος πηγαίνει όμως ακόμη πιο πίσω. Το θέμα Τριγωνομετρίας των εισαγωγικών εξετάσεων του 1947 είχε εμφανιστεί ως προτεινόμενη άσκηση από τον Ε. Περάκη στο τεύχος 17 του *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (Μάιος 1933, σ. 272, άσκηση 406) και είχε λυθεί από τέσσερις αναγνώστες στο τεύχος 20 (Νοέμβριος 1933, σ. 306):

406. Ἐὰν εἰς τρίγωνον $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$, τότε ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Εκεί αποδεικνύεται αρχικά η (17), η οποία μαζί με την (19) και την

$$\rho = \tau \cdot \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \quad (20)$$

οδηγεί στην ισότητα

$$4E = 4\tau^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2.$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει τώρα με αντικατάσταση της τελευταίας στον τύπο (5) της προηγούμενης ενότητας που συνδέει την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές και το εμβαδόν του τριγώνου.

Υποπροϊόν της προηγούμενης λύσης υπήρξε προφανώς η επόμενη άσκηση, που εμφανίστηκε μετά δύο χρόνια ως προτεινόμενη από τον Δ. Λιώκη στο τεύχος 38 του *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (Οκτώβριος 1935, σ. 624, άσκηση 979) και επιλύθηκε από τρεις αναγνώστες στο τεύχος 40 (Δεκέμβριος 1935, σ.653):

979. Ἐὰν $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\rho = \tau$ (ἐνῶν $\rho = \acute{\alpha}\kappa\tau\acute{\iota}\varsigma$ τοῦ ἑγγεγρ. κύκλου).

Η άσκηση 406 του *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* επανεμφανίστηκε επίσης στο βιβλίο των Π.Τόγκα και Π. Πούντζα *Ασκήσεις και Προβλήματα Τριγωνομετρίας* ([30] σ.92, άσκηση 1376). Τα προηγούμενα εξηγούν με σαφήνεια τη δημιουργία του νήματος

Άσκηση 406 *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (1933)→
 Άσκηση 979 *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (1935) →
 Άσκηση 349 στο βιβλίο Πάλλα (1936)→
 Άσκηση 1376 στο βιβλίο των Τόγκα & Πούντζα (1938)

και οδηγούν σε ορισμένα αναπόφευκτα ερωτήματα:

⁷Η ημιπερίμετρος ενός τριγώνου, σύμφωνα με τη σχέση

$$\tau \geq 3\sqrt{3} \cdot \rho$$

• Ήταν άγνωστη στην ελληνική μαθηματική κοινότητα της δεκαετίας του 1930 η ανισότητα

$$1 < \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{3}{2} \quad (A)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα ότι δεν υπάρχει τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα των συγκεκριμένων ασκήσεων;

Θα μπορούσε να υποθέσει κάποιος ότι η συγκεκριμένη ανισότητα ήταν άγνωστη σε εκείνους που πρότειναν και έλυσαν τις ασκήσεις 406 και 979 στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* το 1933 και 1935. Το ίδιο, αν και λιγότερο κατηγορηματικά, θα μπορούσε να υποθέσει και για τον Πάλλα ή τους Τόγκα και Πούντζα που συμπεριέλαβαν τις ασκήσεις αυτές στα βιβλία τους το 1936 και το 1938. Ίσως ακόμη θα μπορούσε να δεχθεί ότι σύμφωνα με τους άγραφους κανόνες της ασκησιολογίας, επικρατούσε από τότε η άποψη ότι η «ασύμβατη υπόθεση» $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$ «ουδόλως επηρεάζει η επίλυση της άσκησης». Τότε όμως το προηγούμενο ερώτημα αντικαθίσταται από το επόμενο:

• Γιατί κανείς από τους προτείνοντες και τους λύτες δεν προβληματίστηκαν από το γεγονός ότι η ισότητα $\rho = \tau$ (είτε ως ενδιάμεσο αποτέλεσμα στην πορεία της λύσης, είτε – ακόμη χειρότερα – ως ζητούμενο) είναι εμφανέστατα παράλογη;

Αν πάλι δεχθούμε ότι η ψυχολογία του λύτη μπροστά σε μια άσκηση δεν ευνοεί κριτικούς προβληματισμούς αυτού του είδους, τότε θα πρέπει να αφήσουμε κατά μέρος τα «άδυνα» της ασκησιολογίας και να ασχοληθούμε με ένα πιο ουσιαστικό ερώτημα:

• Για ποιο λόγο οι θεματοδότες του μαθηματικού τμήματος επέλεξαν ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων μια άσκηση η οποία, εκτός από προβληματική, είχε δημοσιευτεί πριν μερικά χρόνια στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* και σε δύο (τουλάχιστον) συλλογές ασκήσεων Τριγωνομετρίας;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα μας απασχολήσει εκτενώς στη συνέχεια, αφού προηγουμένως παραθέσουμε ορισμένα απαραίτητα στοιχεία για την ανισότητα (A) καθώς και για μια απροσδόκητη, δημόσια διαμάχη που είχε ως αφορμή το θέμα Τριγωνομετρίας του 1947.

4 Οι γεωμετρικές ανισότητες στην ελληνική βιβλιογραφία

Η ανισότητα (A) ανήκει σε μια περιοχή της μαθηματικής έρευνας που φέρει σήμερα το όνομα «Γεωμετρικές ανισότητες» και γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη σε διεθνές επίπεδο από τις αρχές του 20ου αιώνα. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1930 υπήρξε στη σχετική έρευνα αξιόλογη συμμετοχή Ελλήνων μαθηματικών, τόσο με τη δημοσίευση ορισμένων νέων αποτελεσμάτων όσο και νέων αποδείξεων γνωστών (βλ. υποσημείωση 6), είναι μεγαλύτερη από το πενταπλάσιο της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου.

ανισοτήτων. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι οι σχετικές εργασίες δημοσιεύτηκαν σε ελληνικά περιοδικά και ένα από τα νέα αποτελέσματα εκείνης της εποχής, όπως η ανισότητα

$$\sigma\alpha + \sigma\beta + \sigma\gamma \geq \sqrt{3}$$

είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία ως «ανισότητα Κριτικού-Βαρόπουλου».⁸

Η πρώτη εμφάνιση της ανισότητας (Α) στην ελληνική βιβλιογραφία έγινε μάλλον στην εργασία του Γερ. Θεοδωράκη με τίτλο «Ιδιότητες τινές τῶν γωνιῶν τριγώνου» που δημοσιεύτηκε στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (τεύχος 1, Φεβρουάριος 1937, σ.1). Στην εργασία αυτή αποδεικνύονται οι παρακάτω ανισότητες:

- α) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma \leq \frac{9}{4}$
- β) $\sigma\alpha^2 + \sigma\beta^2 + \sigma\gamma^2 \geq \frac{3}{4}$
- γ) $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- δ) $\sigma\alpha + \sigma\beta + \sigma\gamma \leq \frac{3}{2}$
- ε) $\sigma\alpha\sigma\beta\sigma\gamma \leq \frac{1}{8}$

Ο Θεοδωράκης αποδεικνύει την (α) χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς και βασικές προτάσεις για τα αλγεβρικά μέγιστα και ελάχιστα, δηλαδή γνώσεις από την ύλη των αναλυτικών προγραμμάτων εκείνης της εποχής. Η (β) είναι άμεση συνέπεια της (α), ενώ η (γ) προκύπτει με χρήση της (α) αφού αποδειχθεί αρχικά με κυκλική εφαρμογή της ανισότητας $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ στα $\eta\mu A$, $\eta\mu B$, $\eta\mu \Gamma$, η ανισότητα

$$3(\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma) \geq (\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma)^2$$

Στη συνέχεια ο συγγραφέας αναφέρει ότι αν εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα (δ) με χρήση της (β), χωρίς όμως να εξηγεί με ποιο τρόπο μπορεί να γίνει αυτό. Τέλος αποδεικνύει την (ε) με χρήση της (α) και της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2 + 2\sigma\alpha\sigma\beta\sigma\gamma.$$

Οι προηγούμενες ανισότητες απουσίαζαν εκείνη την περίοδο όχι μόνο από τα σχολικά βιβλία, αλλά και από τις ογκώδεις συλλογές ασκήσεων Τριγωνομετρίας που προορίζονταν για τους υποψήφιους των εισαγωγικών εξετάσεων στα Α.Ε.Ι.⁹ Είναι όμως φανερό ότι είχε δημιουργηθεί ένας αξιόλογος πυρήνας μαθηματικών της τριτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ακόμη και φοιτητών, με σταθερό ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο ζήτημα. Δύο

⁸Λεπτομερή στοιχεία για το συγκεκριμένο ζήτημα περιέχονται στο ([5], σσ.7-9).

⁹Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τρίτομη συλλογή ασκήσεων και προβλημάτων Τριγωνομετρίας των Π. Τόγκα και Π. Πούντζα (1938) που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

¹⁰Οι συγκεκριμένες ταυτότητες αποτελούσαν εκείνη της εποχής,

μήνες μετά την εργασία του Θεοδωράκη δημοσιεύτηκε στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* (τεύχος 3, Απρίλιος 1937, σ.47) η ακόλουθη «Παρατήρησης» από τον πρωτοετή φοιτητή (όπως υπογράφει) Σ. Παχή:

Εἰς τὰς ὑπὸ τοῦ κ. Γ. Θεοδωράκη δημοσιευθεῖσας σχέσεις προσθέτομεν καὶ τὴν ἀκόλουθον.
«Εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύει ἡ ἀνισότης ,

$$\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ἥτις καθίσταται ἰσότης διὰ τὸ ἰσόπλευρον».
(Ακολουθεῖ ἡ απόδειξη)

Υπάρχουν πολλές ενδείξεις ότι στον πυρήνα που προαναφέραμε είχε σημαντικό καθοδηγητικό ρόλο ο καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Θεόδωρος Βαρόπουλος (1894-1957), ο οποίος στις αρχές του 1948 προκάλεσε μια απροσδόκητη εξέλιξη στο ζήτημα που εξετάζουμε. Θα ασχοληθούμε διεξοδικά με αυτή την εξέλιξη στην επόμενη ενότητα, αφού πρώτα ανακεφαλαιώσουμε τον τρόπο δημιουργίας της άσκησης που χρησιμοποιήθηκε ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων στο μαθηματικό τμήμα της Αθήνας το 1947.

Είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη άσκηση κατασκευάστηκε ως εφαρμογή των δύο επόμενων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων που ισχύουν για τις γωνίες ενός τριγώνου:

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma &= 4\sigma\alpha\frac{A}{2}\sigma\beta\frac{B}{2}\sigma\gamma\frac{\Gamma}{2} \\ \sigma\alpha + \sigma\beta + \sigma\gamma &= 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \end{aligned}^{10}$$

Είναι επίσης φανερό ότι ο κατασκευαστής, επιλέγοντας τα δεδομένα της άσκησης, αγνοούσε την ανισότητα (Α) που καθιστά την ισότητα $\sigma\alpha + \sigma\beta + \sigma\gamma = 2$ άκυρη, καθώς και ορισμένες ακόμη βασικές ανισότητες από τις οποίες ο λύτης καταλαβαίνει αμέσως ότι οι περισσότερες ισότητες που προκύπτουν στην πορεία της λύσης είναι παράλογες.

Παρατηρούμε δηλαδή ένα νοσηρό φαινόμενο με ιδιαίτερη σημασία και προεκτάσεις για τη μαθηματική εκπαίδευση. Τη δημιουργία, δημοσίευση και επίλυση ασκήσεων από μαθηματικούς οι οποίοι, είτε έχουν άγνοια βασικών γνώσεων του κλάδου στον οποίο εντάσσονται οι συγκεκριμένες ασκήσεις, είτε επιχειρούν να παραπλανήσουν τους αναγνώστες τους.¹¹ Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται συγκεντρωμένα όλα τα στοιχεία που αναδεικνύουν το ουσιαστικό περιεχόμενο αυτής της ενότητας.

αλλά μέχρι πριν μερικά χρόνια, βασικές θεωρητικές γνώσεις της σχολικής Τριγωνομετρίας.

¹¹Όπως θα διαπιστώσουμε στην επόμενη ενότητα, αυτή η ερμηνευτική προσέγγιση του φαινομένου υιοθετήθηκε από τον Θ. Βαρόπουλο με έναν ιδιαίτερα δηκτικό τρόπο.

	Δεδομένα της άσκησης		Αντίστοιχες ανισότητες	
	$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1$		$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	
	$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2$		$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{3}{2}$	
Τριγωνομετρικές ισότητες	Συνέπειες που προκύπτουν από τα δεδομένα της άσκησης			
$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \frac{1}{4}$		$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$	
$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$	$\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \frac{1}{4}$		$\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$	
	$\epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\frac{B}{2}\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 1$		$\epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\frac{B}{2}\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$	
$\rho = 4R \cdot \eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$	$\rho = R$		$R \geq 2\rho$	
$\rho = \tau \cdot \epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\frac{B}{2}\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$	$\rho = \tau$		$\tau \geq 3\sqrt{3} \cdot \rho$	

5 Η διαμάχη Βαρόπουλου και Πάλλας για το θέμα Τριγωνομετρίας του 1947

Στο περιοδικό Αιών του Άτόμου (τεύχος 3, Μάρτιος 1948, σ.348) δημοσιεύτηκε μια εργασία (χωρίς τίτλο) του Θεόδωρου Βαρόπουλου, που άρχιζε ως εξής:

Τὸ εἰς τὸ Παράρτημα Δελτίου τῆς Ἑλλην. Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, ἀρ. 10, Σεπτέμβριος, Ὀκτώβριος 1947, σελ. 302 δημοσιευόμενον πρόβλημα καὶ τὸ ὁποῖον ἀληθεύει διὰ οὐδὲν τρίγωνον, ὡς δύναται τις εὐκόλως νὰ διαπιστώσῃ, θέτει ζήτημα εὐρέσεως ἀνωτέρου ὁρίου τῆς παραστάσεως

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$$

δι' ἣν A, B, Γ εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου. Προφανὲς εἶναι ὅτι

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

διὰ τὸ ἄθροισμα $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma$, ὡς ἔδειξεν ὁ καθηγητὴς κ. Ξηρουδάκης, ἀνώτερον ὄριον εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{2}$.¹²

Στη συνέχεια της εργασίας του ο Βαρόπουλος ασχολείται αποκλειστικά με την εύρεση του ἄνω φράγματος της παράστασης $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$ το οποίο, ὅπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ο Θεοδωράκης είχε αποδείξει με στοιχειώδη μέσα στην εργασία του που δημοσιεύτηκε στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* το 1937.¹³

¹²Η απόδειξη του Ξηρουδάκη που αναφέρει ο Βαρόπουλος είναι πιθανότατα εκείνη που περιέχεται στο ([12], σ.47).

¹³Ο Βαρόπουλος χρησιμοποιεί στην απόδειξή του ορισμένες θεωρητικές έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας που βρίσκονται μακριά της σχολικής ύλης (ιδιότητες των επιφανειών δευτέρου βαθμού).

¹⁴Η ανακολουθία, ὅσον αφορά τὸ χρόνο δημοσίευσής, ἀνάμεσα στὴν ἐργασία τοῦ Βαρόπουλου (Μάρτιος 1948) καὶ ἐκείνη τοῦ Πάλλα (Ἰανουάριος-Φεβρουάριος 1948), οφείλεται μᾶλλον στο γεγονός ὅτι τὰ τεύχη τοῦ *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* κυκλοφοροῦσαν σὲ χρόνο μεταγενέστερο

ἢ δημοσίευσής τῆς ἐργασίας τοῦ Βαρόπουλου προκάλεσε μίαν μᾶλλον ἀπροσδόκητη ἀντίδραση. Ὁ Ἀριστείδης Πάλλας, ἰδιοκτήτης φροντιστηρίου στὴν Ἀθήνα, καθηγητὴς στὴ Σχολὴ Ναυτικῶν Δοξίμων, μέλος τοῦ Δ.Σ. τῆς *Ε.Μ.Ε.* καὶ τῆς συντακτικῆς ἐπιτροπῆς τοῦ *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.*, δημοσίευσε στὸ τεύχος 12 (Ἰανουάριος-Φεβρουάριος 1948, σσ.361-362) ἓνα κείμενο μετὸ μακροσκελὴ τίτλο:

Περὶ τοῦ μεγίστου τῆς συναρτήσεως $y = \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$ ὅταν A, B, Γ γωνίαι τριγώνου, ἐξ' ἀφορμῆς ἀρθρου τοῦ καθηγητοῦ κ. Θ. Βαροπούλου δημοσιευθέντος εἰς τὸ περιοδικὸν «Αἰὼν τοῦ ἀτόμου» μηνὸς Μαρτίου 1948.
14

Θεωρούμε σχόπιμο νὰ παραθέσουμε ολόκληρο τὸ κείμενο αὐτὸ τοῦ Πάλλα, ἐπειδὴ ἀναδεικνύει ορισμένες ἐνδιαφέρουσες ἀντιλήψεις ποὺ κυριαρχοῦσαν τὴν ἐποχὴ ἐκείνη (καὶ ὄχι μόνον) σχετικὰ μετὴν ἐννοία τῆς μαθηματικῆς ἀπόδειξης:

Εἰς τὸ ἐν λόγω ἀρθρον ὁ κ. Βαρόπουλος εὐρίσκει τὸ ἐν λόγω μέγιστον τῆς βοηθείας τῆς κυλινδρικής ἐπιφανείας

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\sigma\upsilon\nu\Gamma - 2yz\sigma\upsilon\nu A - 2zx\sigma\upsilon\nu B = 0.$$

Οἱ ἀναγνώσται θὰ ἐνθυμοῦνται τὴν εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 8 τεύχος τοῦ «Παραρτήματος» σελὶς 252 δημοσιευθεῖσαν στοιχειώδη εὕρεσιν τοῦ ἐν λόγω μεγίστου διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ τριγώνου καθὼς καὶ τοῦ μεγίστου τῆς $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$ (τεύχος 7ον σελὶς 217).¹⁵ Ἰδοὺ ὁμως μερικαὶ ἀπορίαι μας διὰ τὸν φίλον κ. Βαρόπουλον.

τοῦ ἀναγραφόμενου στὸ ἐξώφυλλο τοῦ περιοδικοῦ. Τὸ πιθανότερο εἶναι ὅτι ὁ Πάλλας ἐσπευσε νὰ δημοσιεύσῃ τὸ κείμενό του στὸ πρῶτο διαθέσιμο τεύχος τοῦ *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* μετὰ τὸ ἀρθρον τοῦ Βαρόπουλου.

¹⁵Ὁ Πάλλας ἀναφέρεται σὲ δύο ἀσκήσεις μετὰ ζητούμενο τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου τῶν παραστάσεων $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$ καὶ $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$ ποὺ εἶχαν προταθεῖ πρὸς λύσιν στὸ *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* τὸ 1946 καὶ 1947 ἀπὸ τὸ φοιτητὴ Μαθηματικῶν Λυσίμαχο Μαυρίδη. Ὁ Μαυρίδης, ποὺ ἦταν διακεκριμένος μαθητὴς τοῦ Βαρόπουλου, διετέλεσε ἀργότερα καθηγητὴς στὴν Πολυτεχνικὴ Σχολὴ τοῦ Α.Π.Θ..

1) Ὁ κ. Βαρόπουλος εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἄρθρον γράφει, ὅτι ἀφορμὴν εὐρέσεως τοῦ μεγίστου τῆς παραστάσεως $y = \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$ τοῦ δίδει τὸ πρόβλημα τὸ δημοσιευθὲν εἰς τὸ Παράρτημα τοῦ Δελτίου τῆς Ε.Μ.Ε. ἀριθμ. 10 Ὀκτώβριος 1947 καὶ τὸ ὁποῖον ἐτέθη εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῆς Μαθηματικῆς Σχολῆς ἔχον ὡς ἑξῆς.

«Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἰσχύουν αἱ σχέσεις $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 1$ καὶ $\text{συν} A + \text{συν} B + \text{συν} \Gamma = 2$, νὰ δευχθῇ ἡ ἰσότης $R = \alpha\beta\gamma : (\alpha + \beta + \gamma)^2$.»

Τὸ πρόβλημα τοῦτο οὐδαμοῦ δίδει ἀφορμὴν εὐρέσεως τοιοῦτου μεγίστου.

2) Ὁ κ. Βαρόπουλος ἀνευ τῆς δεούσης προσοχῆς γράφων διὰ τὸ πρόβλημα, θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι, ἐπειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\text{συν} A + \text{συν} B + \text{συν} \Gamma \leq \frac{3}{2},$$

τὸ πρόβλημα εἶναι λανθασμένον, νομίζομεν ὅτι ὁ κ. Βαρόπουλος δὲν ἔχει δίκαιον, διότι εἰς τὸ πρόβλημα ὑπάρχει ἓνα **ἐὰν** καὶ συνεπῶς οὐδεμίαν σημασίαν ἔχουν τὰ μετέπειτα δεδομένα. Ἐὰν τὸ **ἐὰν** τοῦτο δὲν εὐσταθῇ διὰ τὸ τυχὸν τρίγωνον, τότε δὲν θὰ εὐσταθῇ καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐκτὸς ἐὰν ἢ μὴ εὐσταθοῦσα σχέσις οὐδαμοῦ παρουσιάζεται εἰς τὴν συνέχειαν τῶν συλλογισμῶν, ὅτε οὐδεμίαν ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ ἐξαγομένου. Ἐν πρόβλημα δὲν θεωρεῖται καλῶς τεθὲν ἐὰν τὰ δεδομένα ἀνταποκρίνονται εἰς τὴν πραγματικότητα ἀλλὰ κάθε πρόβλημα εἶναι καλῶς τεθὲν καὶ ἡ διερεύνησις εἶναι ἐκεῖνη ἢ ὁποία ξεχωρίζει τὰς φυσικὰς λύσεις ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τοιαῦται. Ἴδου μερικὰ προβλήματα «ἄνθρωπός τις ἀναχωρεῖ με ταχύτητα 200 μέτρων τὸ λεπτόν, τὸ ὕψος τοῦ ἀνθρώπου εἶναι 50 μέτρα μετὰ πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τῶν 5000 μέτρων», «Ἀλώπηξ εἶχε κάμη 60 πηδήματα ... τὸ χρῶμα τοῦ λαγωνικοῦ εἶναι μαῦρο, μετὰ πόσα πηδήματα τὸ λαγωνικὸν θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα». Τὰ δεδομένα ὕψος ἀνθρώπου καὶ χρῶμα λαγωνικοῦ οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχουν ἐπὶ τοῦ προβλήματος, «νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $\alpha = 1000$, $\beta = 100$, $\gamma = 20$ ». Τὸ πρόβλημα ἔχει καλῶς τεθῇ, λύσις εἶναι ὅτι δὲν ὑπάρχει τοιοῦ-

τον τριγώνον. Ἡ ἀπάντησις εἰς αὐτὸ δίδεται ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ ἢ ἐὰν προχωρήσῃ τις εἰς τὴν ἐπίλυσιν.

3) Διατὶ ὁ κ. Βαρόπουλος δι' ὅλα αὐτὰ ἐχρησιμοποίησε τὰς στήλας μὴ εἰδικοῦ διὰ τὰ Μαθηματικὰ περιοδικοῦ, ἐνῶ οἰαδήποτε γνώμη του γνωρίζει κάλλιστα, ὅτι θὰ εὕρισκε τὴν θέσιν τῆς εἰς τὰ δύο περιοδικὰ τῆς διεθνοῦς κύρους Ε.Μ.Ε. εἰς τὰ ὁποῖα ὡς γνωρίζει ἡ δημοσίευσίς τῶν διαφόρων ἐργασιῶν γίνεται κατόπιν κρίσεως ὑπὸ ἐπιτροπῶν μιᾶς τῶν ὁποίων εἶναι μέλος.

Βέβαιον ὄντες, ὅτι ὁ κ. Βαρόπουλος θὰ ἀναγνωρίσῃ τὰ ἀνωτέρω ἀναμεινομεν ἀπάντησίν του.

Ο Βαρόπουλος ἀνταποκρίθηκε στὴν πρόσκληση τοῦ Πάλλα καὶ σὲ ἀντίθεση με τὸ ἥπιο ὕφος τῆς κριτικῆς του στο περιοδικὸ Αἰὼν τοῦ Ἀτόμου, ἀπάντησε με μιὰ εἰρωνική καὶ ἀκρως δηκτικὴ ἐπιστολὴ που δημοσιεύτηκε στὸ Π.Δ.Ε.Μ.Ε. (τεύχος 14, Μάιος-Ιούνιος 1948, σ.425· ἡ ἐμφαση δική μας):

Ἐν Θεσσαλονίκῃ τῇ 12 Μαΐου 1948

Κον Α. Πάλλαν καθηγητὴν Σχολῆς Ναυτικῶν Δοξίμων

Κε Συνάδελφε

Εἰς τὸ ἄρθρον σας τῆς σελ. 361 τοῦ παραρτήματος τοῦ Δ.Μ.Ε. Ἀρ. 12 σειρᾶς Ἰανουαρίου-Φεβρουαρίου 1948, ἀπαντᾷ, σύμφωνα με τὴν ἐπιθυμίαν σας, διὰ νὰ σᾶς ὑπενηθυμίσω, ὡς γνωστόν, ὅτι ὁ σχηματισμὸς προβλημάτων, οἷον τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὸ τεῦχος 10 τοῦ παραρτήματος τοῦ Δ.Μ.Ε. σελ. 302 γίνεται ἂν **ὁ κατασκευάζων ταῦτα ἔχει δύο προσόντα**

α) Θέλει νὰ παραπεῖθῃ

β) ἔχει τὸ προσὸν τῆς ἀγνοίας.

Πολλάκις δὲ διὰ νὰ καλύψῃ τὸ δεύτερον ἰσχυρίζεται ὅτι χρησιμοποιεῖ τὸ πρῶτον.

Ὅπως καὶ ἂν ἔχῃ τὸ πρᾶγμα, ὁ τρόπος με τὸν ὁποῖον, εἰς τὸ ὡς ἀνω δημοσίευσά σας ὑποστηρίζετε τὴν πρώτην περίπτωσιν, δὲν ἀφίνει καμμίαν ἀμφιβολίαν, εἶμαι βέβαιος καὶ σὲ σᾶς, ὅτι εὐρίσκεται ἐν ἰσχύει ἡ δευτέρα περίπτωσις.¹⁶

Μετὰ συναδελφικῶν χαιρετισμῶν

Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ¹⁷

τὸ «παραπεῖθω».

¹⁷Εἶναι χαρακτηριστικὸ (καὶ ἰδιαίτερα διδακτικὸ γιὰ τὰ ἐπικοινωνιακά ἤθη τῆς σημερινῆς ἐποχῆς ...) τὸ γεγονὸς ὅτι ἀμέσως μετὰ τὸ κείμενο τῆς ἐπιστολῆς τοῦ Βαρόπουλου στὸ Π.Δ.Ε.Μ.Ε. ἀκολουθεῖ σημείωσις τοῦ Πάλλα στὴν ὁποία ἀναφέρει: «Τὴν ἀνωτέρω ἐπιστολὴν ἔδωσα πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὸ παράρτημα τοῦ Δ.Ε.Μ.Ε. κατὰ καθήκον ...».

¹⁶Οἱ χαρακτηρισμοὶ καὶ οἱ υπαινιγμοὶ που χρησιμοποιεῖ σὲ αὐτὴ τὴ σύντομη ἐπιστολὴ ὁ Βαρόπουλος (ὁ ὁποῖος ἦταν ἀριστος χρήστης τῆς ἑλληνικῆς γλώσσας) εἶναι βαρύτατοι. Σύμφωνα με τὸ ἐπίτομο λεξικὸ Διμητράκου καὶ τὸν ιστότοπο «Πύλη γιὰ τὴν ἑλληνικὴ γλώσσα», τὸ ρῆμα «παραπεῖθω» ἔχει τὶς σημασίες του «ξεγελῶ», «ἐξαπατῶ κάποιον», «τὸν παρασύρω με παραπλανητικὰ λόγια ἢ ἐπιχειρήματα». Βλ. σχετικὰ στὸ <https://www.greek-language.gr/greekLang/index.html> με ἀναζήτηση στα λεξικά γιὰ

Τα κείμενα που παραθέσαμε σε αυτή την ενότητα είναι αποκαλυπτικά, τόσο για την επιλογή του συγκεκριμένου θέματος από τους θεματοδότες το 1947, όσο και για ορισμένες αντιλήψεις και συμπεριφορές στη χώρα της ελληνικής μαθηματικής κοινότητας εκείνη την εποχή. Για να αντιληφθούμε όμως τα μηνύματα που μεταφέρουν θα χρειαστεί να εμβαθύνουμε στο περιεχόμενό τους.

6 Μια ανάλυση του περιεχομένου της διαμάχης

Το πρώτο στοιχείο που εντυπωσιάζει στο αρχικό κείμενο του Βαρόπουλου είναι ο πλάγιος τρόπος με τον οποίο ασκεί κριτική στο επίμαχο θέμα των εξετάσεων. Εστιάζει στην άσκηση που δημοσιεύτηκε στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* αποφεύγοντας οποιαδήποτε αναφορά στις εισαγωγικές εξετάσεις ή τους θεματοδότες του μαθηματικού τμήματος ή ακόμη και στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* (όπου ο Πάλλας έσπευδε να πληροφορήσει τους αναγνώστες ότι το θέμα υπήρχε σε ένα δικό του βιβλίο).

Το δεύτερο στοιχείο που εντυπωσιάζει είναι ότι η κριτική περιορίζεται σε μια νύξη για την ανυπαρξία τριγώνου με τις συγκεκριμένες ιδιότητες, και ο ισχυρισμός ότι η δημοσίευση του προβλήματος στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* «... θέτει ζήτημα εύρεσης ανωτέρου όριου τής παραστάσεως $\eta^2 A + \eta^2 B + \eta^2 \Gamma \dots$ » (ζήτημα με το οποίο είχαν ήδη ασχοληθεί στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.*, όπως είδαμε, ο Γ. Θεοδωράκης και ο Λ. Μαυρίδης).

Είναι φανερό ότι ο Βαρόπουλος δεν επιθυμούσε να θέσει στο στόχαστρο εκείνους που είχαν κατασκευάσει και δημοσιεύσει τη συγκεκριμένη άσκηση στο παρελθόν, ούτε εκείνους που την επέλεξαν ως θέμα εξετάσεων.

Τα προηγούμενα καθιστούν επίσης δυσεξήγητο τον τρόπο με τον οποίο αντέδρασε ο Πάλλας. Αναζητώντας τις αιτίες αυτής της αντίδρασης, θα μπορούσαμε αρχικά να υποστηρίξουμε ότι θεωρούσε τον εαυτό του εκτεθειμένο επειδή στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* αποκάλυπτε ο ίδιος την παρουσία της προβληματικής άσκησης σε ένα βιβλίο του. Δηλαδή η θριαμβολογία του φροντιστή Πάλλα ότι «είχε προβλέψει ένα θέμα εισαγωγικών εξετάσεων» κινδύνευε να εξελιχθεί σε μέσο δυσφήμισης από τους ανταγωνιστές του!¹⁸

Με δεδομένη τη μορφή της κριτικής του Βαρόπουλου

¹⁸ Ανατρέχοντας κανείς στους τόμους του Ετήσιου Δελτίου Θεμάτων που εκδίδονταν ανελλιπώς από το 1947 μέχρι το 1981, θα διαπιστώσει ότι μεταξύ των ιδιοκτητών των φροντιστηρίων υπήρχε όλη αυτή την περίοδο ένας αδυσώπητος ανταγωνισμός, που εκδηλώνονταν με θεμιτά και αθέμιτα μέσα. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται επίσης από διάφορες άλλες πηγές εκείνης της εποχής.

¹⁹ Όπως θα διαπιστώσουμε στην όγδοη ενότητα της εργασίας, ο Πάλλας δεν είχε ψευδαισθήσεις για τον προβληματικό χαρακτήρα του θέματος Τριγωνομετρίας του 1947.

²⁰ Σε αυτό το ζήτημα η απάντηση δεν είναι τόσο απλή όσο ενδεχομένως φαίνεται, ιδιαίτερα αν λάβουμε υπόψη όλα τα δεδομένα της

και την απουσία από τον ίδιο οποιασδήποτε αναφοράς στην προίστορία της άσκησης, μια τέτοια αντίδραση υποδηλώνει προφανώς αδικαιολόγητη και υπερβολική ευθυξία.

Μια άλλη πιθανή ερμηνεία είναι ότι ο Πάλλας επιχειρήσε να υπερασπιστεί το κύρος του περιοδικού της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (και της ίδιας της Εταιρείας γενικότερα), δεδομένου ότι η λύση της άσκησης που δημοσιεύτηκε στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* περιείχε μαθηματικούς παραλογισμούς.¹⁹

Ανεξάρτητα πάντως από τα κίνητρα της αντίδρασης του Πάλλα, το κείμενό του στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* επιχειρεί ουσιαστικά να δικαιολογήσει τη δημιουργία μαθηματικών ασκήσεων και προβλημάτων χωρίς να δεσμεύεται ο δημιουργός ή ο λύτης από το μαθηματικό ορθολογισμό του περιεχομένου. Η έμφαση που δίνει στην παρουσία του «εάν» πριν από τα δεδομένα ενός προβλήματος, δημιουργεί αρχικά την υπόνοια ότι τοποθετεί το ζήτημα στο πλαίσιο της μαθηματικής λογικής (κάθε συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ με ψευδή προκείμενη p , είναι αληθής). Όταν όμως υποστηρίζει στη συνέχεια ότι «ή διερεύνησης είναι εκείνη ή όποια ξεχωρίζει τὰς φυσικὰς λύσεις ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τοιαῦται», η συζήτηση οδηγείται εκτός λογικής και αναδύονται ορισμένα ερωτήματα:

- Τι είδους διερεύνηση έπρεπε να κάνουν οι υποψήφιοι στο θέμα Τριγωνομετρίας του 1947, το οποίο απαιτούσε

«Ἐὰν εἰς ἓν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $\dots$, τότε νὰ δειχθῇ ὅτι $\dots$ ».

Επίσης, όταν ο Πάλλας αναφέρει ως παράδειγμα προβλήματος την επίλυση ενός ανύπαρκτου τριγώνου και γράφει «Τὸ πρόβλημα ἔχει καλῶς τεθῆ, λύσεις εἶναι ὅτι δὲν ὑπάρχει τοιοῦτον τρίγωνον», προκαλεί αμέσως το ερώτημα:

- Οι «αποδείξεις» του θέματος Τριγωνομετρίας που δημοσιεύτηκαν στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* και στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* ήταν «λύσεις» ή όχι;

Είναι φανερό ότι το προηγούμενο κείμενο του Πάλλα (όπως και το αρχικό του Βαρόπουλου) αποφεύγουν να ασχοληθούν με την ουσία του ζητήματος, δηλαδή τη συμβατότητα του θέματος Τριγωνομετρίας με τους γραπτούς (αλλά και τους άγραφους) κανόνες διεξαγωγής των εισαγωγικών εξετάσεων.²⁰

Το κείμενο του Πάλλα αποτελεί ουσιαστικά μία ανοιχτή συνηγορία υπέρ της ανεξέλεγκτης «ασκησιολογίας»,

ταραχώδους πρώτης μεταπολεμικής περιόδου. Μια συνολική αντιμετώπιση μπορεί να γίνει όταν δοθούν και άλλα σχετικά παραδείγματα, κάτι το οποίο σχεδιάζουμε να κάνουμε σε επόμενες εργασίες αυτής της σειράς.

²¹ Είναι χαρακτηριστικό ότι τον όρο «ασκησιολογία» χρησιμοποίησε στα μέσα της δεκαετίας του 1960 ο καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών Δημήτριος Κάππος (1904-1985), για να χαρακτηρίσει τόσο το επίπεδο της διδασκαλίας των Μαθηματικών όσο και τις μαθηματικές γνώσεις των αποφοίτων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ([9], σσ.3-4)

την οποία καλλιεργούσε η δραστηριότητα των φροντιστών τροφοδοτούμενη από την εξίσου ανεξέλεγκτη θεματοδοσία των εισαγωγικών εξετάσεων.²¹ Παραφράζοντας τον ιδρυτή της συνολοθεωρίας Georg Cantor, θα μπορούσε κάποιος να συνοψίσει με ειρωνική διάθεση το κείμενο του Πάλλα σε ένα μήνυμα: «Η ουσία της ασκησιολογίας έγκειται στην ελευθερία της»!

Η απάντηση του Βαρόπουλου στο κείμενο του Πάλλα, συγκρινόμενη με την αρχική παρέμβασή του, εντυπωσιάζει όχι μόνο για το ειρωνικό και δριμύ ύφος, αλλά και τον τρόπο που χαρακτηρίζει όσους κατασκευάζουν προβλήματα αυτού του είδους. Η παράλειψή του να συμπεριλάβει ρητά στους προηγούμενους και όσους επιλέγουν τέτοια προβλήματα ως θέματα εξετάσεων, μας υποχρεώνει κατά κάποιο τρόπο να εξετάσουμε αν οι θεματοδότες του 1947 ήθελαν να «παραπείσουν» ή είχαν το «προσόν της άγνοιας».

7 Με ποια κριτήρια οι καθηγητές του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας επέλεξαν τη συγκεκριμένη άσκηση ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων;

Δεν διαθέτουμε καμία γραπτή μαρτυρία για οποιαδήποτε αντίδραση ή τοποθέτηση των καθηγητών του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας σχετικά με το επίμαχο θέμα Τριγωνομετρίας ή τα διαμειφθέντα μεταξύ Βαρόπουλου και Πάλλα. Έτσι κάθε απόπειρα να δοθεί μια απάντηση στο ερώτημα-τίτλο αυτής της ενότητας θα στηριχτεί σε υποθέσεις, και τα όποια συμπεράσματα μπορεί να αναθεωρηθούν αν προκύψουν νέα στοιχεία.

Καθηγητές του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας το 1947 ήταν οι εξής:

Ο Παναγιώτης Ζερβός (1878-1952), τακτικός καθηγητής της έδρας Μαθηματικής Αναλύσεως από το 1923 μέχρι το 1949.

Ο Νείλος Σακελλαρίου (1882-1955), τακτικός καθηγητής της έδρας Ανωτέρας Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας από το 1921 μέχρι το 1953 και πρόεδρος της Ε.Μ.Ε. από το 1929 μέχρι το 1955.

Ο Σπυρίδων Σαραντόπουλος (1894-1969), έκτακτος καθηγητής της έδρας Διαφορικής και Παραστατικής Γεωμετρίας από το 1943 και τακτικός από το 1948 μέχρι το 1965.²²

Τα δηκτικά σχόλια του Βαρόπουλου κατά του Πάλλα ισχύουν βεβαίως και για τους καθηγητές του μαθηματικού

τμήματος που επέλεξαν τη συγκεκριμένη άσκηση ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων.²³ Ο Βαρόπουλος αποφεύγει να κάνει οποιαδήποτε αναφορά σε αυτό το ζήτημα στο κείμενο ή την επιστολή του, αλλά υπάρχει ένα αναμφισβήτητο γεγονός: Η αντίδρασή του εκδηλώθηκε όταν η άσκηση εμφανίστηκε ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων το 1947 και όχι όταν την περίοδο 1933-1938 δημοσιεύτηκε δύο φορές στο Π.Δ.Ε.Μ.Ε. και στα βιβλία του Πάλλα και των Τόγκα και Πούντζα. Θεωρούμε αρκετά εύλογη την υπόθεση ότι ουδείς θα έκανε τον κόπο να ασχοληθεί με τον προβληματικό χαρακτήρα της συγκεκριμένης άσκησης, αν δεν επιλέγονταν ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων. Έτσι επανερχόμαστε στο ερώτημα που θέσαμε στο τέλος της τρίτης ενότητας:

- Για ποιο λόγο οι θεματοδότες επέλεξαν ως θέμα εισαγωγικών εξετάσεων στο μαθηματικό τμήμα μια άσκηση η οποία, εκτός από προβληματική, είχε δημοσιευτεί πριν μερικά χρόνια στο Π.Δ.Ε.Μ.Ε. και σε δύο (τουλάχιστον) συλλογές ασκήσεων Τριγωνομετρίας;

Υπάρχει ένα ευρύ φάσμα απαντήσεων που θα μπορούσαν να δοθούν σε αυτό το ερώτημα: Από την παραδοχή ότι είχαν άγνοια του προβληματικού χαρακτήρα της άσκησης, ή το γνώριζαν αλλά θεωρούσαν ότι αυτό ακριβώς την καθιστά ένα μη αναμενόμενο θέμα εξετάσεων. Αναζητώντας απαντήσεις μπορεί κάποιος να φτάσει μέχρι την υπόνοια ότι οι θεματοδότες ήθελαν να προβάλλουν το Π.Δ.Ε.Μ.Ε. ή το βιβλίο του Πάλλα ή το βιβλίο των Τόγκα και Πούντζα ως πηγές άντλησης θεμάτων. Η περίπτωση της «άγνοιας» εμφανίζεται ως μία ελκυστική και εύλογη ερμηνεία, αλλά υπάρχουν ορισμένα στοιχεία που πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη πριν υιοθετηθεί:

α) Όπως δείξαμε στην τέταρτη ενότητα, η ανισότητα η

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G \leq \frac{3}{2}$$

οποία αναδεικνύει άμεσα την «ασύμβατη υπόθεση» της άσκησης, δεν ήταν άγνωστη στην ελληνική βιβλιογραφία.

β) Η άσκηση κυκλοφορούσε σε δύο εκδοχές με ζητούμενο τη σχέση

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

ή την εμφανέστερα παράλογη ισότητα $\rho = \tau$ (σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\tau > 5\rho$), που είναι ισοδύναμη της προηγούμενης.

γ) Οποιοσδήποτε μαθηματικός ασχοληθεί στοιχειωδώς με τις συνέπειες των υποθέσεων $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu G = 1$ και

θούσε η τυπική έγκρισή τους από τους καθηγητές. Αυτό βεβαίως δεν απαλλάσσει καθόλου τους καθηγητές από την ευθύνη, απλώς τη μεταθέτει σε ένα άλλο επίπεδο που δεν εμπίπτει στο σκοπό αυτής εργασίας. Σε κάθε περίπτωση όμως είναι ένα ενδιαφέρον ζήτημα, η μελέτη του οποίου απαιτεί αρχειακή έρευνα.

²² Τα στοιχεία αυτά προέρχονται από το [10]. Στο [33] αναφέρεται επίσης ότι ο Αριστείδης Πάλλας υπήρξε βοηθός του Νείλου Σακελλαρίου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών την περίοδο 1925-1929.

²³ Στο σημείο αυτό θεωρούμε αναγκαία την ακόλουθη διευκρίνιση: Είναι πιθανό η επιλογή των θεμάτων των εισαγωγικών εξετάσεων να γινόταν από βοηθούς του μαθηματικού τμήματος και να ακολου-

$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ = 2$, θα αντιληφθεί αργά ή γρήγορα τους παραλογισμούς που προκύπτουν.

Η περίπτωση του «μη αναμενόμενου θέματος» μας εισάγει στο πεδίο του ευνόητου μεν αλλά σκληρού ανταγωνισμού μεταξύ των ασχολούμενων επαγγελματικά με την προετοιμασία των υποψηφίων, καθώς και του «υπόγειου» ανταγωνισμού που αναπτύσσεται μεταξύ θεματοδοτών και φροντιστών. Ο τελευταίος συνδέεται με το γεγονός ότι οι θεματοδότες, επιχειρώντας να διαφυλάξουν το κύρος των επιλογών τους (το οποίο καθορίζεται από πολλούς παράγοντες), αναζητούν θέματα που δεν είναι τετριμμένα ούτε γνωστές ασκήσεις από τη φροντιστηριακή βιβλιογραφία. Το έργο αυτό γίνεται όλο και πιο απαιτητικό καθώς αυξάνεται η σχετική εκδοτική δραστηριότητα, και μπορεί βάσιμα να υποστηριχτεί ότι ο προαναφερθείς «υπόγειος» ανταγωνισμός είχε λάβει σημαντικές διαστάσεις ήδη από τα μέσα της δεκαετίας του 1930. Όμως από το σημείο αυτό, μέχρι την απόφαση να αναβαθμιστεί μια άσκηση με ψευδείς υποθέσεις σε «μη αναμενόμενο θέμα», και να τεθεί στις εξετάσεις, υπάρχει μεγάλη απόσταση. Αυτή η απόφαση σημαίνει ουσιαστικά ότι η εγκυρότητα μιας ισότητας όπως η $\rho = \tau$ καθορίζεται όχι από το ανύπαρκτο μαθηματικό περιεχόμενό της, αλλά από το γεγονός ότι προκύπτει στην πορεία μιας αλληλουχίας συλλογισμών με αφετηρία κάποιες υποθέσεις. Πρόκειται για άσκηση μαθηματικής λογικής, αλλά χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο.²⁴

Ανεξάρτητα από τα επιχειρήματα που μπορεί να επικαλεστεί κάποιος υπέρ της «νομιμότητας» τέτοιων ασκήσεων (όπως π.χ. εκείνα που χρησιμοποίησε ο Πάλλας στην απάντησή του προς τον Βαρόπουλο), είναι φανερό ότι η χρήση τους σε εισαγωγικές εξετάσεις παραβιάζει κάθε αρχή αντικειμενικής αξιολόγησης. Τα ακόλουθα ερωτήματα είναι αυτονόητα και αμείλικτα:

- Πώς θα αξιολογηθεί ένας υποψήφιος που διαπιστώνει ότι κάποιο ενδιάμεσο αποτέλεσμα της αποδεικτικής διαδικασίας είναι εμφανώς παράλογο και εγκαταλείπει την προσπάθεια επίλυσης;
- Είναι δυνατό αυτή η σαφής ένδειξη κριτικής σκέψης να αξιολογηθεί χαμηλότερα (ή ακόμη και ισότιμα) με την άκριτη αποδοχή όλων των παράλογων συνεπειών που προκύπτουν από τις ψευδείς υποθέσεις, επειδή και μόνο οδηγούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα;

Η συνειδητή επιλογή ενός τέτοιου θέματος σε εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. υποδηλώνει ότι το θεσμικό πλαίσιο της διεξαγωγής τους, όχι μόνο δεν απαιτεί τη λογοδοσία των θεματοδοτών, αλλά αντίθετα ευνοεί την εκ-

²⁴Τέτοιου είδους ασκήσεις απόκτησαν κάποια «νομιμοποίηση» στις δεκαετίες του 1960 και 1970, όταν άρχισαν να εμφανίζονται στα σχολικά και εξωσχολικά και βιβλία στο πλαίσιο της μεταφρύνιμης των «Νέων Μαθηματικών» και της εισαγωγής στοιχείων μαθηματικής λογικής στα αναλυτικά προγράμματα.

²⁵Το ζήτημα αυτό απαιτεί ασφαλώς ξεχωριστή έρευνα, αλλά μία απλή ανάγνωση των σχολίων του Πάλλα στους τόμους του Ετήσιου

δήλωση φαινομένων ασυδοσίας και αυθαιρεσίας.

Η ιστορία της φανεράς και της αθέατης όψης των εισαγωγικών εξετάσεων στην Ελλάδα, παρέχει πράγματι αρκετά τεκμήρια που επιβεβαιώνουν ότι η ασυδοσία και η αυθαιρεσία αποτελούσαν συχνό φαινόμενο στην επιλογή των θεμάτων.²⁵

Η περίπτωση της «προβολής» συνδέεται κυρίως με την πολυπραγμοσύνη του Πάλλα, ο οποίος, εκτός από ιδιοκτήτης μεγάλου φροντιστηρίου με έντονη συγγραφική δραστηριότητα, ήταν επίσης καθηγητής στις Σχολές Ναυτικών Δοξίμων και Ευελπίδων και γενικός γραμματέας της Ε.Μ.Ε. (με πρόεδρο τον Σακελλαρίου, του οποίου είχε διατελέσει βοηθός στο Πανεπιστήμιο την περίοδο 1925-1929). Αυτό το πλέγμα διασυνδέσεων αφήνει περιθώρια για διάφορες σκέψεις και υπόνοιες με τις οποίες βέβαια δεν πρόκειται να ασχοληθούμε. Όσοι ενδιαφέρονται όμως να ερευνήσουν το θέμα οφείλουν να μελετήσουν προσεκτικά τις μετέπειτα παρεμβάσεις του Πάλλα στα εκπαιδευτικά ζητήματα, τις οποίες χαρακτήριζε η σκληρή κριτική για τον τρόπο επιλογής των θεμάτων από τους καθηγητές των Α.Ε.Ι. Αποκορύφωμα αυτών των παρεμβάσεων υπήρξε η εντονότατη κριτική των θεμάτων του Πολυτεχνείου το 1962, η οποία συνέβαλε αποφασιστικά στην ανάληψή της διεξαγωγής των εισαγωγικών εξετάσεων από το Υπουργείο Παιδείας.

Στην ενότητα αυτή εκθέσαμε, με βάση τα υπάρχοντα στοιχεία και την ανάλυση που προηγήθηκε, ορισμένες πιθανές ερμηνείες για την επιλογή του προβληματικού θέματος Τριγωνομετρίας από τους καθηγητές της μαθηματικού τμήματος της Αθήνας το 1947. Η επιλογή της επικρατούσας άποψης επαφίεται στην κρίση του αναγνώστη, με την επισήμανση ότι περισσότερο φως στο συγκεκριμένο ζήτημα μπορεί να ρίξει η μελέτη και των υπόλοιπων θεμάτων που τέθηκαν στην ίδια σχολή εκείνο το έτος.²⁶

8 Η επιβίωση του θέματος Τριγωνομετρίας του 1947 στη νεότερη βιβλιογραφία

Το θέμα που εξετάζουμε σε αυτή την ενότητα έχει μεγάλη σημασία για την κατανόηση του φαινομένου της ασκησιολογίας και την εξάπλωσή του.

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Πάλλας, που είχε λόγους να υπερασπιστεί τη «νομιμότητα» της άσκησης που δημοσιεύτηκε τη δεκαετία του 1930 στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.* και στη δική του *Μεγάλη Συλλογή Ασκήσεων Τριγωνομετρίας*, δεν την συμπεριέλαβε στο βιβλίο του *Μεγάλη Τριγωνομε-*

Δελτίου Θεμάτων δεν αφήνει αμφιβολίες για τη συχνότητα του φαινομένου. Σε επόμενες εργασίες θα επιχειρήσουμε να δείξουμε με χαρακτηριστικά παραδείγματα τα αποτελέσματα της ασυδοσίας και της αυθαιρεσίας στην επιλογή ορισμένων θεμάτων στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι..

²⁶Με αυτό το ζήτημα σκοπεύουμε να ασχοληθούμε σε μια μελλοντική εργασία αυτής της σειράς.

τρία (1η έκδοση 1950, 2η έκδοση 1963, 3η έκδοση 1970). Στο πρόλογο της 1ης έκδοσης αναφέρει ότι

... εις τὸ βιβλίον μας τοῦτο περιέχονται καὶ πάντα τὰ θέματα, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν ἀνωτάτων τοῦ Κράτους Σχολῶν ...

ενώ στον πρόλογο της 3ης έκδοσης η αναφορά γίνεται ακόμη πιο συγκεκριμένη:

Εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν περιέχονται καὶ ὅλαι αἱ ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας αἱ δοθεῖσαι εἰς τὰς Ἀνωτέρας καὶ Ἀνωτάτας Σχολὰς εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς τῶν ἐξετάσεων ἀπὸ τὸ ἔτος 1947 ἕως καὶ τὸ ἔτος 1969.

Ὅμως το επίμαχο θέμα του 1947 όχι μόνο απουσιάζει ἀπὸ τις ασκήσεις του βιβλίου ἀλλὰ ἐπιπλέον ἀποδεικνύεται (σ.247) ἡ ἀνισότητα

$$1 < \text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ \leq \frac{3}{2}$$

που καθιστὰ τὴν ὑπόθεση $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ = 2$ ἀνευ περιεχομένου.

Αντίθετα, στο τρίτομο ἔργο του Πάλλα *Γενικαὶ Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας* που ἐκδόθηκε τὴν περίοδο 1977-1979, τὸ θέμα ἐμφανίζεται στὸν πρῶτο τόμο με αὐξοῦντα ἀριθμὸ 17 (σ.11) καὶ ἐπιλύεται με τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο που εἶχε λυθεῖ στο *Ετήσιο Δελτίο Θεμάτων* τοῦ 1947 (βλ. τὴ δεύτερη ἐνότητα αὐτῆς τῆς ἐργασίας).

Ἡ «μεταστροφή» τοῦ Πάλλα οφείλεται ἴσως στο γεγονός ὅτι ἡ συγκεκριμένη ἀσκηση δὲν ἐξαφανίστηκε ἀπὸ τὴ φροντιστηριακὴ βιβλιογραφία ἀλλὰ ἐξακολούθησε νὰ ἐμφανίζεται σὲ πολλὰ ἔργα εὐρείας κυκλοφορίας (βλ. ἐνδεικτικὰ τὰ [7], σ.263· [8], σ.162· [11], σσ.90-91· [13], σσ.515-516· [21], σ.254· [22], σ.185· [27], σσ.103-104· [28], σ.276· [29], σ.174).

Στα προηγούμενα βιβλία παρατηροῦμε τὴν «ἐπιβίωση» τῆς συγκεκριμένης ἀσκησης γιὰ περισσότερες ἀπὸ τρεῖς δεκαετίες μετὰ τὴν ἐμφάνισή της ὡς θέμα εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων. Εἶναι τουλάχιστον ἀξιοπερίεργο ὅτι ἐξαίρετοι καὶ πολυγραφότατοι συγγραφεῖς ἐπιλύουν τὴν ἀσκηση χωρὶς νὰ προβληματίζονται ἀπὸ τὴν ψευδὴ ὑπόθεση ἢ τὴν ἐμφάνιση τῶν ἐνδιάμεσων ψευδῶν σχέσεων (ὅπως ἡ ἰσότητα τῆς ακτίνας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου με τὴν ἡμιπερίμετρο ἐνός τριγώνου). Εἶναι μάλιστα χαρακτηριστικὸ ὅτι σὲ ὅλα σχεδὸν τὰ προηγούμενα βιβλία ὑπάρχουν ἐφαρμογές καὶ ἀσκήσεις γιὰ τις γεωμετρικὲς ἀνισότητες, μετὰξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἐκεῖνες που ἀποδεικνύουν τὸν προβληματικὸ χαρακτήρα τῆς ἀσκησης.

²⁷Πρέπει νὰ τονίσουμε ὅτι ὁ Τόγκας εἶχε πολυετὴ καὶ πολὺπλευρὴ διδακτικὴ δραστηριότητα. Διατηροῦσε φροντιστήριον καὶ παρέδιδε ἰδιαίτερα μαθήματα ἐνῶ στὴ συνέχεια ὑπῆρξε καθηγητὴς Μαθηματι-

Ἡ πιο περιέργη περίπτωση διαχείρισης τῆς ἀσκησης γίνεται στο βιβλίο τοῦ Π. Τόγκα *Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία* (1η έκδοση 1946· 2η έκδοση 1950· 3η έκδοση 1957). Στὴ 18η έκδοση (οὐσιαστικὰ πρόκειται γιὰ ἀνατύπωση τῆς 3ης ἐκδοσης) ἡ ἀσκηση διατυπώνεται ὡς ἐξῆς ([28], σ.276):

Ἐὰν εἰς ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ = 2$ καὶ $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu Γ = 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Μαθημ. τμήμα).

Ἡ ἐμφάνιση τοῦ ἀριθμοῦ 4 στὸν παρονομαστή δὲν εἶναι τυπογραφικὸ, ἀλλὰ οφείλεται σὲ ἓνα λάθος στὴν πορεία ἐπίλυσης. Στὸ τεύχος με τὴς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τοῦ βιβλίου, ἀποδεικνύεται ἀρχικὰ ἀπὸ τὰ δεδομένα ἡ ἰσότητα $E = \tau^2$, καὶ στὴ συνέχεια τὸ ζητούμενο ἀπὸ τὴ σχέση

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$$

με ἀντικατάσταση τοῦ E ἀπὸ τὸ $\tau^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2$ ἀντὶ τοῦ ὁρθοῦ

$$\tau^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{4}.$$

Εκεῖνο ὅμως που προκαλεῖ κατὰπληξιν εἶναι ὅτι στο ἴδιο τεύχος, ἀμέσως μετὰ τὴν ἀπόδειξη, ὁ συγγραφέας ἀναφέρει τὰ ἐξῆς ([29], σ.174):

Παρατήρησης. Ἡ ληφθεῖσα ὡς ὑπόθεσις σχέσις $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ = 2$ εἶναι ἐσφαλμένη, διότι τὸ ἄθροισμα $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ$ περιέχεται μετὰξὺ 1 καὶ $\frac{3}{2}$, δηλ. εἶναι

$$1 \leq \text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ \leq \frac{3}{2}.$$

(Ἀκολουθεῖ ἀπόδειξη τῆς ἀνισότητος)

Γιὰ ποιο λόγο ὁ Τόγκας συμπεριέλαβε στο βιβλίο τοῦ ἓνα θέμα ἐξετάσεων, τὸ ἔλυσε καὶ ἀμέσως μετὰ ἔκανε τὴν πα-
ραπάνω δήλωση;

Ἡ μόνη ρεαλιστικὴ ἀπάντηση που μποροῦμε νὰ σκεφτοῦμε εἶναι ἡ ἐξῆς:

Τὰ βιβλία τοῦ Τόγκα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τεύχη με τὴς λύσεις τῶν ἀσκήσεων ὑπῆρξαν ἐπὶ τρεῖς τουλάχιστον δεκαετίες τὰ πλέον δημοφιλῆ ἐργαλεῖα προετοιμασίας τῶν υποψηφίων στα Μαθηματικὰ τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων καὶ γνώρισαν πολυάριθμες ἐκδόσεις. Περιεῖχαν μεθοδικὴ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας καὶ πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ παραδειγμάτων καὶ ἀσκήσεων, μετὰξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονταν τὰ θέματα τῶν ἐξετάσεων τῶν προηγούμενων ἐτῶν. Τὰ τελευταῖα

κῶν (αργότερα καὶ διευθυντῆς) στο Βαρβάκειο Γυμνάσιον καὶ Πρακτικὸ Λύκειον.

αποτελούσαν βασικό οδηγό μελέτης, καθώς οριοθετούσαν το επίπεδο δυσκολίας των εξετάσεων στις διάφορες σχολές και το είδος των ασκήσεων που έπρεπε να μελετήσει ένας υποψήφιος. Το μήνυμα επομένως που ήθελε να στείλει ο πολύπειρος Τόγκας²⁷ στους υποψήφιους με την προηγούμενη παρατήρηση ήταν σαφές:

Προσέξτε! Η άσκηση αυτή, παρόλο που περιέχει μια λανθασμένη υπόθεση τέθηκε στις εισαγωγικές εξετάσεις. Άρα κανένα θέμα δεν είναι απίθανο. Ενδέχεται να υπάρχουν ακόμη και «ασύμβατες υποθέσεις», οι οποίες όμως «ουδόλως επηρεάζουν την επίλυση του θέματος». Θα ξεκινήσετε από τις υποθέσεις και θα προσπαθήσετε να φτάσετε στο ζητούμενο, αδιαφορώντας αν κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα φαίνονται παράλογα.

Υπάρχουν επίσης σαφείς ενδείξεις ότι η συγκεκριμένη άσκηση όχι μόνο επιβίωσε στην ελληνική βιβλιογραφία, αλλά λειτούργησε επιπλέον ως «γεννήτρια» διάφορων εξίσου προβληματικών ασκήσεων που δημοσιεύτηκαν σε βιβλία ή στο *Π.Δ.Ε.Μ.Ε.*

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το εξής ([26], σ.171):

Ἐὰν εἰς ἓνα τρίγωνον $3R = 4\rho$ τότε

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G = \frac{7}{4}$$

Εδώ πρόκειται για μία ακόμη πιο εξελιγμένη μορφή νοσηρής ασκησιολογίας, με την έννοια ότι ζητείται η απόδειξη μιας συνεπαγωγής με ψευδή προκείμενη και ψευδές συμπέρασμα. Μάλιστα ο λύτης που αγνοεί τις ανισότητες

$$R \geq 2\rho \text{ και } \text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G \leq \frac{3}{2}$$

δεν μπορεί να αντιληφθεί τον προβληματικό χαρακτήρα της άσκησης από ενδιάμεσα αποτελέσματα, επειδή το ζητούμενο προκύπτει άμεσα με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G = 1 + \frac{\rho}{R}$$

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί επίσης να καταλογιστεί στο συγγραφέα το κατά Βαρόπουλο «προσόν της άγνοιας», επειδή στο ίδιο βιβλίο υπάρχουν τα εξής:

Στη σελίδα 192 χρησιμοποιείται ο γνωστός από την εποχή του Euler τύπος

$$(OI)^2 = R(R - 2\rho)$$

που παρέχει την απόσταση μεταξύ των κέντρων O και I του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου. Από αυτόν συνάγεται άμεσα ότι ισχύει η

²⁸Η οποία δεν υπήρχε στην πρώτη έκδοση του ίδιου βιβλίου το 1961.

ανισότητα $R \geq 2\rho$ και άρα η υπόθεση της προηγούμενης άσκησης είναι ψευδής.

Στη σελίδα 197 ζητείται ως άσκηση η απόδειξη του προηγούμενου τύπου του Euler.

Τέλος στις σελίδες 228-229, ο συγγραφέας ζητά την απόδειξη 28 γεωμετρικών ανισοτήτων, με πρώτη την

$$1 < \text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}G \leq \frac{3}{2}$$

και τελευταία την $8E^2 \leq \tau\alpha\beta\gamma$, όπου τα $A, B, G, \alpha, \beta, \gamma, E$ και τ είναι οι γωνίες, οι πλευρές, το εμβαδόν και η ημιπερίμετρος ενός τριγώνου (η τελευταία, όπως γίνεται άμεσα φανερό, είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $R \geq 2\rho$).

Η προηγούμενη «δημιουργία»²⁸ είναι μια ακραία περίπτωση της άκρατης και ανεξέλεγκτης ασκησιολογίας που αναπτύχθηκε γύρω από το θεσμό των εισαγωγικών εξετάσεων, κυρίως κατά τη διάρκεια της περιόδου 1960-1975. Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και άλλα συναφή παραδείγματα από τη σχετική βιβλιογραφία, αλλά θεωρούμε ότι θα είναι πιο ουσιαστική η συστηματική ανάλυσή τους στις επόμενες εργασίες αυτής της σειράς.

Θα ολοκληρώσουμε την ενότητα με ένα σχόλιο του σπουδαίου Ρώσου αλγεβριστή Pyotr Sergeyevich Novikov (1901-1975) που είναι αποκαλυπτικό για το σαθρό επιστημολογικό υπόβαθρο αυτής της δραστηριότητας. Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του *Elements of Mathematical Logic* αναφέρει τα εξής ([17], σ.22· η έμφαση δική μας):

Η τρίτη πράξη²⁹ συμβολίζεται με $A \Rightarrow B$: αυτή η πρόταση είναι ψευδής αν, και μόνο αν, η A είναι αληθής και η B είναι ψευδής. Η A ονομάζεται προκείμενη και η B επακόλουθη. Η πράξη $A \Rightarrow B$ ονομάζεται συνεπαγωγή. Στον καθημερινό λόγο, αυτή η πράξη αντιστοιχεί στο σύνδεσμο «αν – τότε»: «αν A , τότε B ». Αλλά, στον ορισμό μας, αυτή η πρόταση είναι πάντοτε αληθής όταν η A ψευδής ανεξάρτητα από το αν η πρόταση B είναι ψευδής ή όχι. Αυτή η κατάσταση μπορεί να διατυπωθεί εν συντομία ως εξής: «**μια ψευδής πρόταση συνεπάγεται οτιδήποτε θέλουμε**». Μερικές φορές γίνεται κατανοητό, στον καθημερινό λόγο, ότι όταν η A είναι ψευδής, τότε η πρόταση «αν A , τότε B » στερείται νοήματος. Ωστόσο, εδώ δεν μπορούμε να δεχτούμε μια τέτοια ερμηνεία. Στην πραγματικότητα, ως υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι έχει αποδειχθεί μία αναγωγή – η οποία ανάγει την υπόθεση B , που είναι κάποιος ισχυρισμός στη θεωρία αριθμών, στην υπόθεση Riemann, την οποία συμβολίζουμε με A . Δεν είναι γνωστό αν το

²⁹Οι δύο προηγούμενες πράξεις ήταν η σύζευξη και η διάζευξη των λογικών προτάσεων.

« A συνεπάγεται B » είναι αληθές. Έτσι, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός « A συνεπάγεται B » είναι αληθής σε αυτήν την περίπτωση, αν και η A μπορεί να είναι ψευδής. Από την άλλη πλευρά, αυτή η αναγωγή παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο όταν είναι άγνωστο αν η προκείμενη A είναι αληθής. Στην πραγματικότητα, αν γνωρίζαμε ότι η προκείμενη ήταν αληθής, τότε η αναγωγή θα ισοδυναμούσε με την απόδειξη της B .

Ο Novikov εκθέτει στο προηγούμενο κείμενο, με τη νηφαλιότητα και ακρίβεια του επιστημονικού λόγου, όλα εκείνα τα στοιχεία που συνόψισε με δηκτικό τρόπο ο Βαρόπουλος στην απάντησή του προς τον Πάλλα το 1948.

9 Μερικές προεκτάσεις στη σύγχρονη εποχή

Το θέμα Τριγωνομετρίας του 1947 αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας κατηγορίας προβληματικών θεμάτων που έχουν εμφανιστεί στην υπερ-εκατονταετή ιστορία των εισαγωγικών εξετάσεων. Αυτή η κατηγορία δεν περιλαμβάνει μόνον ασκήσεις με ψευδείς υποθέσεις, αλλά και άλλα εξεζητημένα θέματα που κινούνται στα όρια της αντίστοιχης εξεταστέας ύλης ή και εκτός αυτής. Περιλαμβάνει επίσης θέματα με ελλιπείς υποθέσεις ή ασαφή ζητούμενα, μέχρι και χονδροειδή μαθηματικά λάθη.³⁰

Η παρατήρηση αυτή μας επαναφέρει στη διαχρονικότητα του ζητήματος και μας δίνει τη δυνατότητα να εξετάσουμε την εξέλιξη των σχετικών αντιλήψεων στο περιβάλλον της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Υπενθυμίζουμε αρχικά μια πρόσφατη περίπτωση που έχουμε αναφέρει στην πρώτη ενότητα της εργασίας (βλ. υποσημείωση 2), το θέμα Δ που τέθηκε το 2013 στις πανελλαδικές εξετάσεις του μαθήματος Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας των Εσπερινών Γενικών Λυκείων και των ΕΠΑ.Λ.:

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + k + 1$, $x \in \mathbb{R}$, όπου k ακέραιος με $k > 2$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της

f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E , με $E < 4$.

$\Delta 1$. Να αποδείξετε ότι $k = 3$

Μονάδες 7

$\Delta 2$. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους $y_1, y_2, \dots, y_{50}$ έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 63$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$. (Μονάδες 5)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι:

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ αυξάνεται κατά 3. Οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές, και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Να βρείτε το λ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31. (Μονάδες 5)

Μονάδες 10

$\Delta 3$. Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(1)$, $f'(0)$, όπου $f(x) = x^2 + 4$

Μονάδες 8

Το θέμα αυτό θα προκαλούσε σε κάθε Έλληνα μαθηματικό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που ήταν ενεργός το 1947 τουλάχιστον δύο αντιδράσεις. Αρχικά ως προς το περιεχόμενο, επειδή τα στοιχεία απειροστικού λογισμού και στατιστικής που περιέχει ήταν εντελώς ξένα με την ύλη των σχολικών Μαθηματικών εκείνης της εποχής. Η δεύτερη αντίδραση θα αφορούσε την περίεργη (τουλάχιστον) εφαρμογή στατιστικών μέτρων θέσης και διασποράς για τη μελέτη ενός δείγματος που αποτελείται από τιμές μιας συνάρτησης και της παραγώγου της.

Η ανάμειξη ετερόκλητων ενοτήτων της εξεταστέας ύλης για τη δημιουργία δήθεν πρωτότυπων («συνδυαστικών») θεμάτων, έλαβε μεγάλες διαστάσεις όταν οι διακριτές εξετάσεις των παραδοσιακών κλάδων των σχολικών Μαθηματικών (Άλγεβρα, Γεωμετρία και Τριγωνομετρία) αντικαταστάθηκαν από μία ενιαία εξέταση στα Μαθηματικά (η οποία την περίοδο εφαρμογής του συστήματος των

ορισμένες παράξενες και αντιφατικές σχέσεις και θεώρησε ότι είχε κάνει λάθος.

³¹Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου «συνδυαστικού» θέματος ήταν το τρίτο θέμα των γενικών εξετάσεων της πρώτης δέσμης το 1998, που αναφέραμε στην υποσημείωση 30. Η ανάπτυξη και διάδοση αυτού του φαινομένου, στην οποία έχουν συμβάλει ισότιμα η θεματοδοσία των πανελλαδικών εξετάσεων και η υπερτροφική φροντιστηριακή ασχολιολογία, συνιστά μια παθογένεια της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης που θα πρέπει να γίνει κάποτε αντικείμενο έρευνας. Μια αρχική αλλά ενδιαφέρουσα προσέγγιση του ζητήματος επιχειρείται στο [14].

³⁰Ορισμένα από αυτά τα θέματα θα μας απασχολήσουν σε επόμενες εργασίες, αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να μελετήσει μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα στο [2], σσ.33-35 και στο [3], σσ.17-20. Μια άλλη χαρακτηριστική περίπτωση περιγράφεται στο [24], σχετικά με τις αντιφατικές συνέπειες των δεδομένων ενός «συνδυαστικού» θέματος των γενικών εξετάσεων της πρώτης δέσμης το 1998. Στο θέμα αυτό τριώνυμα, πίνακες, ορίζουσες και γραμμικά συστήματα «συνδυάζονται» για να δημιουργηθούν ετερόκλητοι δειγματικοί χώροι και ασκήσεις πιθανοτήτων! Ο συγγραφέας αναφέρει μάλιστα ότι ένας μαθητής του δεν απάντησε στο συγκεκριμένο θέμα όταν διαπίστωσε ότι οι πράξεις οδηγούσαν σε

Δεσμών στην Γ' Λυκείου, περιλάμβανε στοιχεία Γραμμικής και Αφηρημένης Άλγεβρας, Αναλυτικής Γεωμετρίας, Ανάλυσης και Στοχαστικών Μαθηματικών).³¹

Το ερώτημα Δ3 του προηγούμενου θέματος περιέχει μια ψευδή υπόθεση, επειδή όταν είναι $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, τότε $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 3 < 6$. Το δεδομένο $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$ προκάλεσε όπως ήταν επόμενο την άμεση αντίδραση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας καθώς και πλήθος ειρωνικών σχολίων στο διαδίκτυο, γεγονός που ανάγκασε την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων να εκδώσει ανακοίνωση στην οποία αναφέρονται μεταξύ άλλων και τα εξής: ³²

... στο θέμα Δ3 του μαθήματος «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας» των Εσπερινών Λυκείων, στο οποίο εξετάστηκαν περίπου πενταχόσιοι υποψήφιοι, δόθηκε μία ασύμβατη υπόθεση, η οποία, ωστόσο, ουδώς επηρεάζει την επίλυση του θέματος.

Συγκρινόμενη με τη «σιγή ιχθύος» των θεματοδοτών του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας το 1947, η ανακοίνωση αυτή αποτελεί κάποιο βήμα προόδου, αλλά επί της ουσίας παραμένουν ανοικτά όλα τα ερωτήματα και οι παρατηρήσεις που έχουμε διατυπώσει στις προηγούμενες ενότητες. Το μόνο «ελαφρυντικό» που μπορεί να αναγνωριστεί στην Κ.Ε.Ε. του 2013 είναι ότι η συγκεκριμένη ψευδής υπόθεση δεν είχε στόχο την παραπλάνηση των υποψηφίων. Ήταν μάλλον ένα χονδροειδές λάθος που οφείλεται εν μέρει στις απαράδεκτες συνθήκες με τις οποίες γίνεται η επιλογή των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων.³³ Η ζητούμενη στο ερώτημα Δ3 μέση τιμή των τιμών $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(1)$, $f'(0)$ είναι

$$\bar{x} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 17}{5}$$

και άρα από το δεδομένο $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{17}{5} < \bar{x} < 4.$$

Αυτή η ανισότητα ήταν πιθανώς το αρχικό ζητούμενο του ερωτήματος Δ3 αλλά επειδή θεωρήθηκε ότι η απάντηση θα δυσκολέψει τους υποψήφιους, οι θεματοδότες είχαν την ατυχή έμπνευση να δώσουν ως δεύτερο δεδομένο μία τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων ώστε να προκύψει ως απάντηση ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Τέτοιες επιλογές, που γίνονται συνήθως την τελευταία στιγμή, έχουν συμβεί αρκετές φορές στις πανελλαδικές εξετάσεις με τραγελαφικά συνήθως αποτελέσματα. Σε

αυτές τις περιπτώσεις η πλέον ορθολογική και απλή αντιμετώπιση είναι η ακύρωση του επίμαχου ερωτήματος και η κατανομή των αντίστοιχων μονάδων στα υπόλοιπα ερωτήματα του ίδιου θέματος (δεδομένου ότι το πλήθος των ερωτημάτων αποτελεί αρμοδιότητα των θεματοδοτών). Για το λόγο αυτό προκαλεί ιδιαίτερη εντύπωση το γεγονός ότι η επιτροπή επιχείρησε να δικαιολογήσει μία ολοφάνερα λανθασμένη επιλογή με τη φράση «ασύμβατη υπόθεση η οποία ουδώς επηρεάζει την επίλυση του θέματος». Η φράση αυτή αποκαλύπτει αφενός την κατάσταση αμηχανίας στην οποία περιήλθαν τα μέλη της επιτροπής και την τάση αποποίησης ευθυνών, και αφετέρου επιβεβαιώνει τη διαχρονικότητα του ζητήματος που εξετάζουμε.

Ουσιαστικά συνοψίζει όλα τα επιχειρήματα που χρησιμοποίησε το 1948 ο Πάλλας για υποστηρίξει τη «νομιμότητα» του θέματος Τριγωνομετρίας και αφήνει ανοικτά όλα τα ζητήματα δεοντολογίας που έχουμε επισημάνει σχετικά με τη λειτουργία των εξεταστικών μηχανισμών.

Παρόμοιες αντιλήψεις φαίνεται ότι κυριαρχούν σήμερα, ιδιαίτερα στο τμήμα εκείνο της εκπαιδευτικής μαθηματικής κοινότητας που ασχολείται με την προετοιμασία των υποψηφίων στις πανελλαδικές εξετάσεις. Ένα χαρακτηριστικό και διαφωτιστικό παράδειγμα, το οποίο αξίζει να μελετηθεί, αποτελεί η διαμάχη μεταξύ δύο επιφανών εκπροσώπων της δημόσιας και της φροντιστηριακής εκπαίδευσης που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Ευκλείδης Β' το 2004 [31]. Αντικείμενο αυτής της διαμάχης ήταν η αναγκαιότητα ή όχι της επαλήθευσης κατά την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, η οποία εκείνη την εποχή είχε εξελιχθεί σε ύψιστο μορφωτικό αγαθό της καθ' ημάς σχολικής Ανάλυσης. Όλα σχεδόν τα ζητήματα που ανέδειξε η έρευνά μας για το θέμα Τριγωνομετρίας του 1947 φαίνεται να «στοιχειώνουν» ύστερα από έξι ολόκληρες δεκαετίες ...

Βιβλιογραφικές παραπομπές

- [1] Ασκήσεις δοθείσαι εις τας Εισιτηρίους Εξετάσεις δια τας Ανωτάτας Σχολάς. Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας τόμος 10, σσ.300–321. Σεπτέμβριος – Οκτώβριος 1947.
- [2] Θωμαΐδης, Γ. Τα θέματα των εξετάσεων, η μαθηματική απόδειξη και η διδασκαλία των Μαθηματικών. Απολλώνιος τόμος 4, σσ.28–48, 2004.
- [3] Θωμαΐδης, Γ. Μαθηματικά και Εξετάσεις. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2009.

³²Η ανακοίνωση της Κ.Ε.Ε. δημοσιεύτηκε και σχολιάστηκε στον ημερήσιο τύπο και σε διάφορους εκπαιδευτικούς ιστότοπους. Βλέπε: <https://www.esos.gr/arhtra/paneladikes/eidisis-panaladikes/h-kege-gia-to-lauos-uema-d3-sta-mauhmatika>

³³Η επιλογή γίνεται τη νύχτα που προηγείται των εξετάσεων στο ισόγειο του Υπουργείου Παιδείας, τα μέλη της επιτροπής θεματο-

δοτών, που είναι εν γένει άγνωστα μεταξύ τους, συνεδριάζουν σε πλήρη απομόνωση από τον έξω κόσμο και πρέπει να ολοκληρώσουν το έργο τους σε διάστημα λίγων ωρών γνωρίζοντας ότι την επόμενη μέρα θα γίνει αντικείμενο εξονυχιστικής κριτικής στο διαδίκτυο. Προφανώς οι θεματοδότες του μαθηματικού τμήματος της Αθήνας το 1947 είχαν πολύ καλύτερες συνθήκες εργασίας.

- [4]] Θωμαΐδης, Γ. & Ρίζος, Γ. *Εγγενείς δυσκολίες στον προσδιορισμό ακροτάτων: Μια μελέτη σε ελληνικά βιβλία στοιχειώδους Άλγεβρας του 20ου αιώνα*. Ευκλείδης γ' τεύχος 91, σσ.1-53, 2019.
- [5]] Θωμαΐδης, Γ. & Μάγκος, Θ. *Τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου: Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στις γεωμετρικές ανισότητες*. Εκθέτης φύλλο 25. Δεκέμβριος 2023. Διαθέσιμο στον ιστότοπο: <http://www.ekthetis.gr>
- [6]] Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος, Α. *Ελληνικά Περιοδικά για τα Στοιχειώδη Μαθηματικά και τη Μαθηματική Εκπαίδευση: 1916-2024*. Ευκλείδης γ' τεύχος 100(1-2), σσ.1-83, 2024.
- [7]] Κανέλλος, Σ. *Στοιχεία Τριγωνομετρίας*. Έκδοσις 2α, Εκδοτικός Οίκος Παπαδημητροπούλου, Αθήναι, 1970.
- [8]] Κανέλλος, Σ. *Συστηματικά Ασκήσεις Τριγωνομετρίας*. Τεύχος 2ο. Εκδοτικός Οίκος Παπαδημητροπούλου, Αθήναι, 1975.
- [9]] Κάππος, Δ. *Η μαθηματική λογική και η θεωρία συνόλων. Ο ρόλος των εις την διδασκαλίαν των σχολείων Μέσης Παιδείας*. Διαλέξεις οργανωθείσαι υπό της Ε.Μ.Ε. και γενόμεναι κατά τα έτη 1965-1966, σσ.3-51. Εκδοτικός Οίκος Παπαδημητροπούλου, Αθήναι, 1967.
- [10]] Κασσιούρας, Μ. *Σύντομος ιστορική εξέλιξις του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Βιογραφία των διδασκάντων*. Η εργασία δημοσιεύτηκε σε συνέχειες από το 1969 μέχρι το 1974 στο περιοδικό Ο Ευκλείδης της Ε.Μ.Ε.,
- [11]] Μαντάς, Ι. *Τριγωνομετρία 2*. Αθήναι, 1971.
- [12]] Μαραγκάκης, Μ. *Γεωμετρικά Θέματα*. Αθήνα, 1978.
- [13]] Μαραγκάκης, Μ. *Θέματα Τριγωνομετρικά*. Αθήνα, 1979.
- [14]] Μαυρογιάννης, Ν. *Τα Θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων Μαθηματικών Προσανατολισμού 2017 και η πρόσληψή τους από την μαθηματική κοινότητα*. (9 Ιουλίου 2017). Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://www.nsmavrogiannis.gr/readings/Mavrogiannis_Panellinies%202017.pdf
- [15]] Νικολάου, Ν. *Φροντιστηριακά Μαθηματικά Θέματα*. Τεύχος Α'. Αθήναι, 1939.
- [16]] Νικολάου, Ν. *Τριγωνομετρία. Δια την Η' τάξιν των Γυμνασίων*. Εν Αθήναις, Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων, 1956.
- [17]] Novikov, P. S. *Elements of Mathematical Logic*. Moscow, 1959. English translation and edition: Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964.
- [18]] Πάλλας, Α. *Λύσεις Μεγάλης Συλλογής Ασκήσεων Τριγωνομετρίας*. Εν Αθήναις, Τυπογραφείον Ν. Κυριακού, 1937.
- [19]] Πάλλας, Α. *Θέματα δοθέντα εις τας Εισαγωγικάς Εξετάσεις των Ανωτέρων και Ανωτάτων Σχολών του Κράτους το έτος 1947 μετά των λύσεων αυτών*. Βιβλιοπωλείον Χ. Παπαδημητροπούλου, Αθήναι, 1947.
- [20]] Πανάκης, Ι. *Μαθηματικά Β' Λυκείου. Τριγωνομετρία*. Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1978. (1η έκδοση 1968)
- [21]] Παπανικολάου, Γ. *Μαθήματα Τριγωνομετρίας*. Έκδοσις 3η, Αθήναι, 1963.
- [22]] Παπανικολάου, Γ. *Ασκήσεις Τριγωνομετρίας*. Τεύχος Β', Αθήναι (χωρίς χρονολογία, περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του προηγούμενου).
- [23]] Παπατριανταφύλλου, Ε. *Μαθηματικά ΣΤ' Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως. Τριγωνομετρία*. Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1974. (1η έκδοση 1969)
- [24]] Ράλλης, Ι. *Η εκδίκηση του «συνεπάγεται»*. Πρακτικά 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε., σσ.460-476. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Χίος, 1998.
- [25]] Σάϊλερ, Α. *Προτεινόμενη άσκηση 132*. Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας τεύχος 5, σ.159. Νοέμβριος-Δεκέμβριος 1946. (Η άσκηση λύνεται στο τεύχος 7 από τον προτείνοντα και άλλους 6 αναγνώστες).
- [26]] Σταυριανίδης, Γ. *Τριγωνομετρία*. Ε' Έκδοσις. Θεσσαλονίκη, 1972.
- [27]] Σφουντούρης, Κ. *583 Θέματα Τριγωνομετρίας 1947-1969*. Αθήναι, 1970.
- [28]] Τόγκας, Π. *Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία*. Έκδοσις 18η. Εκδοτικός Οίκος Π. Τόγκα, Αθήναι (χωρίς χρονολογία).
- [29]] Τόγκας, Π. *Ασκήσεις και Προβλήματα Τριγωνομετρίας*. Τόμος Γ'. Έκδοσις 5η. Εκδοτικός Οίκος Π. Τόγκα, Αθήναι (χωρίς χρονολογία, περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του προηγούμενου).
- [30]] Τόγκας, Π. & Πούντζας, Π. *Ασκήσεις και Προβλήματα Τριγωνομετρίας*. Τόμος ΙΙΙ. Εν Αθήναις, Βιβλιοπωλείον Ι. Σιδέρη, 1938.

- [31] Τουμάσης, Μ. & Κυριακόπουλος, Α. Ένας διάλογος για Μαθηματικά και ... Λογική. Ευκλείδης Β' τεύχος 51, σσ.10–13. Ιανουάριος-Φεβρουάριος-Μάρτιος 2004.
- [32] The Mathematical Association. *Student Problems from The Mathematical Gazette*. Leicester, 2002.
- [33] Χρονόπουλος, Π. *Η ζωή και το έργο του Αριστείδη Πάλλα, μαθηματικού από τη Ζαχάρω (1906-1981)*. Ομιλία που πραγματοποιήθηκε στη γενέτειρά του Πάλλα στις 18 Αυγούστου 2018. Διαθέσιμο στον ιστότοπο: <https://drive.google.com/file/d/1srbI7m0reH1XTLyKPsMegtgSLCwdR2tX/view>
- Στις ιστοσελίδες του Παναγιώτη Χρονόπουλου <https://parmenides51.blogspot.com/> και <https://parmenides52.blogspot.com/>
 - Στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας <https://hms.gr/apothema/>
 - Στην Ψηφιακή Συλλογή του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής <https://e-library.iiep.edu.gr/iiep/index.html>
 - Πολλές πληροφορίες επίσης για σημαντικούς μαθηματικούς της φροντιστηριακής εκπαίδευσης υπάρχουν στον ιστότοπο «Ιστορικό Αρχείο Φροντιστών» που επιμελείται ο Γιώργος Κωνσταντάρας: <https://www.facebook.com/istoriko.arxeio.frontistwn>

Ευχαριστίες

Οι περισσότερες από τις πηγές που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνά μας είναι ελεύθερα διαθέσιμες στο διαδίκτυο: Ο συγγραφέας ευχαριστεί τον κριτή της εργασίας για τις εύστοχες παρατηρήσεις του.

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΘΩΜΑΪΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Θεσσαλονίκης, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
 ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΑΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Αθηνών, πρώην Σύμβουλος Α' στο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
 ΣΙΛΟΥΑΝΟΣ ΜΠΡΑΖΙΤΙΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Μαθηματικών Παν. Αθηνών, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παν. Κρήτης
 ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Stanford, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Παν. Αθηνών
 ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΡΙΣΤΟΦΙΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Cambridge, Associate Professor in Mathematics UCLan Cyprus